2012 第 期

数学教学

SHUXUE JIAOXUE 中华人民共和国教育部主管

ISSN 0488-7387
06>



行为主义学习理论与数学有效教学

202150 上海市崇明中学 吴卫国

在有关学习心理的领域里，行为主义学习理论是一种非常重要的理论．但近几年来，人们比较重视认知学习理论和人本主义学习理论的运用，行为主义学习理论被忽视甚至被排斥．笔者认为这不利于我们在教学中科学、全面地把握学生的认知规律，从而不利于有效地提高教学质量．事实上，由于数学学科具有概念性、技能性较强的特点，行为主义学习理论所揭示的一些认知规律对于数学学习仍然具有积极的指导意义．

一、学习需要适度的重复和试误

行为主义学派(也称刺激——反应学派)是上世纪初发展起来的一大心理学流派，其代表人物有桑代克、巴甫洛夫、斯金纳等．美国心理学家桑代克设计了最为典型的“猫开门”实验，他认为猫在食物刺激下作出开门闩的反应，实质上是猫已经形成了一个“刺激”与“反应”的联结，这样的“联结”需要多次的重复才得以保持；并且猫是通过多次的“试误”，在不断地舍弃错误之后学会开门的．

如果将一个“联结”得以保持看作习得了一个知识或技能，那么学习是需要一定的重复的，这就是我们平时所说的反复练习．而在学生学习过程中，老师有时都已经将易错的地方给学生交待得清清楚楚，而学生总还会犯错，这是为什么呢？这是因为学生在掌握一个概念或一项技能时，光听老师讲，而没有经过自己的“试误”，其学习效果是不佳的．例如，给出如下三道题目并采用不同的教法：

题1　已知集合$A\subset\{a,b,c\}$，求集合A．

题2　已知集合$A=\{x|mx+1=0\}$，集合$B=\{1,2\}$，若$A\subset B$，求实数m的取值范围．

题3　已知集合$M=\{x|x^2-1=0\}$，$N=\{x|x^2-2ax+b=0,x\in\mathbf{R}\}$，若$N\subseteq M$，求实数$a$、$b$的值或$a$、$b$满足的关系式．

学生在解答这三道题目时都容易犯一个错误，就是没有对空集进行考虑．第一种教法是老师集中讲解这三道题目解题的注意点，即在解题中要对空集进行考虑．第二种教法是让学生先练习这三道题目，然后再纠错讲评．第三种教法是学生练题一，纠错讲评后学生再练第二题，然后纠错讲评后再练第三题．一周后测试，教法三效果最优，教法二次之，教法一最差．这告诉我们，学生多次反复练习便于知识和方法的巩固，而由学生“试误”的学习，效果往往要好于教师直接的“灌输”．所以在教学中，有经验的老师会将重点的知识和方法在一个过程中多次呈现，而不是一次进行“题海战”；不是简单地告诫学生如何防止错误的发生，而是先让学生去尝试“错误”，然后在纠错过程中深化对概念、法则的理解，这样有利于提高教学的效果．

二、学习需要必要的强化

既然学习是刺激与反应的“联结”，那么如何有效地形成和保持这种“联结”？斯金纳利用“斯金纳箱”对小白鼠进行实验，得到了操作性条件反射的学习理论，即“当学习者出现一个操作行为，如果给以一个强化物，那么这个操作的强度就会增强．”也就是说有效学习必须在一定强化物的作用下，通过多次重复得以实现．一般地说，强化规律有下面三条：

一是练习律，即一个“联结”形成之后，适当的重复应用，可以起到强化作用，反之“联结”会减弱，所以数学教学中为了掌握概念、定理，适当的反复是必须的．教学实践告诉我们，对于一些容易混淆的概念和知识，孤立的简单重复其效果也是有限的，教学中宜采取对比的方法来给学习者强化．例如：

题4　已知集合$A=\{(x,y)|y=-x^2\}$，$B=\{(x,y)|y=x^2+2x-4\}$，求$A\cap B$．

题5　已知集合$A=\{y|y=-x^2\}$，$B=\{y|y=x^2+2x-4\}$，求$A\cap B$．

题4中的元素是“点”，而题5中的元素是“函数值”，两个问题形式相似，但本质完全不一样，学生解题时极易混淆. 进行对比练习，可引起学生较大的认知冲突，从而起到“强化”知识的作用. 又如:

题6 已知函数$y=\lg(x^2-ax+1)$.

(1)若定义域是实数集$\mathbf{R}$，求实数a的取值范围;

(2)若值域是实数集$\mathbf{R}$，求实数a的取值范围.

对于题6中的两个形式相近问题的对比求解，同样可以起到对于不同概念的强化作用.

其次是效果律，当一个“联结”形成后，伴随着学习者的满意，“联结”就会加强，这就是激励的作用；伴随着学习者的烦恼，“联结”就会减弱，这就是处罚的效果. 所以在教学中表扬和批评都可以对学习起到强化作用，但心理学研究表明，奖的作用大于罚的作用. 因此，教师要恰当地使用表扬和批评的手段，以促进效果的强化.

三是准备律，就是说在学习发生时，有准备的学习效果要优于随机的学习. 所以在数学教学中，教师要有目的地指导学生开展预习，在上课时要明确教学目标和学习任务，也即做好教学的“前知”准备工作，这样才会取得更加理想的教学效果. 例如在进行反正弦函数教学时，教师如果引导学生复习反函数概念、反函数图像与原函数图像间的关系，并让学生思考下列问题：正弦函数$y=\sin x, x\in\mathbf{R}$是否存在反函数？给定怎样的取值区间I，正弦型函数$y=\sin x, x\in I$存在反函数？当学生做好了新知识学习的“前知”准备，又对新知学习中的关键问题有了一定的了解和准备，这将在新知学习时大大提高学习效率.

三、练习加上反馈才更有效

在行为主义学习理论的研究中，桑代克还设计了说明反馈作用的实验，他让学生闭上眼睛在纸上画一定长的线段，如果对所画结果无反馈，即使进行3000多次重复，也无法接近定长. 而如果是每画一次都及时反馈，则马上可以逼近定长. 于是行为主义学习理论认为，简单的重复训练往往不产生学习，只有练习加上反馈才能有效地促进学习. 这一点在数学教学中具有很强的指导意义，有些老师在教学中缺少对练习和测试的关注，从而不能将教学的结果有效反馈给学生，造成了学生练习的低效. 因此在数学教学中一定要坚持“练习加反馈”的模式，这样的训练才会高效. 例如，我们进行求函数的反函数的训练:

题7 求下列函数的反函数

(1)$y=x^2+1\,(x<0)$;

(2)$y=\sqrt{x+3}$;

(3)$y=x^2+2x+2\,(x>0)$.

题8 求下列函数的反函数

(1)$y=(x-1)^2+2\,(x<1)$;

(2)$y=\sqrt[4]{x+1}-1$;

(3)$y=x^3+1\,(x<1)$.

这两组题目结构相同，学生在初学反函数求法时非常容易犯错，第(1)题开根号时易忽视取“$-$”，第(2)题容易忽略对反函数定义域的考虑，第(3)题容易忽略$x>0$和$x<1$对函数值域的影响，进而影响反函数的定义域. 我们作了如下的观察：有三组学生同时练习题7，第一组，老师未将结果作反馈，但给学生又重复讲解了反函数求解方法，第二天再做题8；第二组，老师将结果反馈，但未作讲评，第二天再练题8；第三组，老师将结果反馈，并且对错因作了分析，然后第二天再练题8. 结果是第三组效果最佳，第二组效果次之，第一组效果最差. 所以我们认识到，有反馈的练习才是有效的学习，而且反馈的针对性也决定了学习的效果，也就是反馈不仅仅是一个结果的反馈，而应该包含致误原因的反馈.

四、促进积极学习，防止消极学习

行为主义还有一个重要的概念，就是习得性勤奋和习得性无助. 行为主义通过实验得出，经常受到消极强化物的刺激，人的操作行为也变得消极、甚至毫不作为，这就是习得性无助. 行为主义认为人的勤奋也是习得的，对一个勤奋群体的研究得出，勤奋者大多在其经历中有过“勤奋”的行为训练和价值体验，这就是习得性勤奋. 所以在数学教学中，老师要注重对学生的良好学习习惯的培养，例如，预习的习惯、独立思考的习惯、及时完成作业和订正作业的习惯等. 当学生习得了“勤奋”之后，就会生成一种强大的学习动力. 同时，我们在教学中要防止学生“习得性无助”的产生，经常的批评，作业、考试太多太难往往让学生失去学习的信心，造成学生产生消极的

(下转第6-3页)

问题出在哪里?——记一个教学片段

312050 浙江省绍兴县越崎中学 俞新龙

在抛物线的学习中, 笔者让学生做了下面的试题.

试题1 已知抛物线C的方程为$x^2=\frac{1}{2}y$, 过点$A(0,-1)$和点$B(t,3)$的直线与抛物线C没有公共点, 则实数t的取值范围是______.

在作业的批改中, 笔者发现绝大多数学生的答案都是正确的, 即为$(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$. 在第二天的课上, 笔者随意问了学生的解法, 发现很大部分都是相同的做法(解法1), 即通过联立直线AB的方程$y=\frac{4}{t}x-1$与抛物线C方程$x^2=\frac{1}{2}y$后, 消去y得关于x的一元二次方程$x^2-\frac{2}{t}x+\frac{1}{2}=0\,(*)$, 因为直线与抛物线没有交点, 所以$(*)$式的判别式$\Delta=\frac{4}{t^2}-2<0$, 解得$t>\sqrt{2}$或$t<-\sqrt{2}$.

还有极少数同学是通过数形结合, 求过点A且与抛物线相切的直线来求解(解法2), 笔者在课上作为解题方法的补充, 也做了分析, 即如图1, 设过点A且与抛物线相切的方程为$y=kx-1$, 联立$x^2=\frac{1}{2}y$后消去y, 得$x^2-\frac{1}{2}kx+\frac{1}{2}=0$, 则$\frac{1}{4}k^2-2=0, k=\pm2\sqrt{2}$, 故切线方程为$y=\pm2\sqrt{2}x-1$.

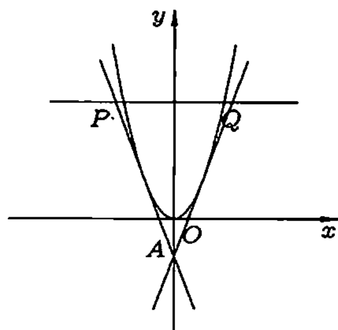


图1

又因为点B在直线$y=3$上移动, 由图1知, 当直线AB与抛物线没有公共点时, 点B应在切线$y=\pm2\sqrt{2}x-1$与直线$y=3$的交点P、Q的外边, 而交点坐标分别为$(-\sqrt{2},3)$、$(\sqrt{2},3)$, 所以$t>\sqrt{2}$或$t<-\sqrt{2}$.

在课后的反思中, 笔者想起前一届高三复习中, 学生错误率也比较高的一道试题, 从上届学生的解法看, 错解的源头正是试题1的解法1. 于是, 笔者又将试题2布置为学生的作业.

试题2 已知曲线$C: y=2x^2$, 点$A(0,-2)$及点$B(3,a)$, 从点A观察点B, 要使视线不被曲线C挡住, 则实数a的取值范围是______.

从作业批改的结果看, 绝大多数学生的错误答案都是$(-14,10)$! 就是完全按试题1的解法1在做. 笔者询问了少数做对正确答案$(-\infty,10)$的学生的解法, 都是数形结合的切线方法.

作业本在上课前发下去后, 教室里炸开了锅, 为什么是错的? 笔者及时让学生静下来思考原因: 问题出在哪里? 经过几分钟的思考后, 有部分学生逐渐发现了原因.

如图2, 过点A的抛物线的切线$l_1: y=4x-2$ (另一条为$l_2: y=-4x-2$) 与直线$x=3$的

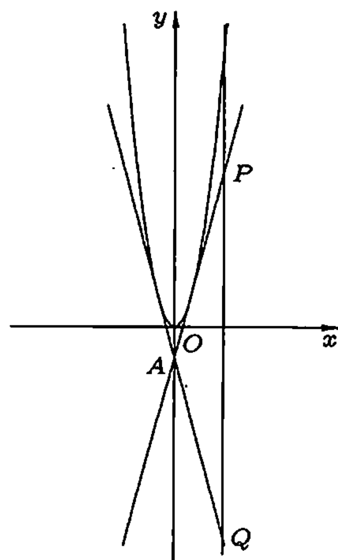


图2

交点为$P(3,10)$，显然当点$B(3,a)$在点P下面时是满足题意的，故$a<10$.

而用方法1解题时，点B在线段PQ内(其中Q是切线l_2与直线$x=3$的交点$(3,-14)$)，显然将Q下面部分给遗弃了，那么为什么会出现遗弃呢？学生们又进入了思考.

没过多久，就有学生发现了问题所在："视线不被曲线挡住"与"直线与抛物线没有公共点"是不同的，当点B落在点Q下面时，直线与抛物线有交点，但从点A观察点B却是不会被曲线挡住的. 那么，能否适当修改解法而成为正解呢？

经过师生探究，最后将问题转化为：直线AB与曲线C在$x>0$上没有交点，则仿解法1可知$2x^2-\frac{a+2}{3}x+2=0$在$x>0$上无解，所以$\left(\frac{a+2}{3}\right)^2-16<0$或$\begin{cases}\left(\frac{a+2}{3}\right)^2-16\geqslant 0,\\ \frac{a+2}{12}\leqslant 0,\end{cases}$

解得$-14<a<10$或$a\leqslant -14$，即$a<10$.

问题虽然解决了，但笔者和学生却并没有满足，而是继续对整个解决问题的过程进行反思，获得了以下四点解题教训.

1. 要尽量降低思维定势的负影响

在解题过程中，思维定势造成的负影响是不可避免的，但可以通过仔细审题，认真研究尽可能地降低影响程度；另外，日后解题中，无论是否是自己遇到过的问题，都作为第一次解题来对待应该也是有效避免的方法.

例如，本文中试题2学生明显是受了前一天试题1解答的影响，认为两题的解答是完全一致的，从而不自觉地落入了题目的"圈套".

2. 要注意对题中文字意思的深入理解

数学虽不像语文一样，经常需要咬文嚼字，但有时也必须逐字逐句地理解意思，否则就会出现似是而非的情况，例如，本文中的"没有公共点"与"不被挡住"是不同的意思，又如"在"点与"过"点的切线也是不同的，等等.

3. 要注意对解题方法的辨析

"条条道路通罗马"，一个数学问题同样会有多种解题方法，在这几种方法中，要辨析哪个方法是通性通法和基本解法，是适合解决一类问题的方法，这样的方法才是必须理解掌握好的方法，除此以外的方法，可以作为通法的补充来了解. 例如，本文中的方法1对于两题来讲虽都是可用的，但用在第2题上就需要进行"修改"，而方法2对于两题来讲都可直接使用，因此，显然方法2是基本方法，方法2蕴含的数形结合思想是解题的重要思想.

4. 要注意对平时解题中资料的累积

学生做过的题何止成千上万，我们应该分类整理这些试题中易错的、易混的、有共性的等具类似特征的试题作为自己的资料库，通过对资料库的学习定能提升自己分析问题，解决问题的能力. 例如，将本文中试题1和试题2作为对比试题放在易混库中，对于明辨解题策略益处颇多.

(上接第6-1页)

学习心态. 在教学中教师要善于为学生的学习做好铺垫工作，注重训练中"搭桥"，避免思维跨度太大，造成学生思维无法跨越而造成习得性无助. 例如学生进行如下题目的学习：

题9 求$y=\sin x\cdot\cos x+a(\sin x+\cos x)+1$, $x\in\mathbf{R}$, a为实参数，试求函数y的最大值$g(a)$.

题10 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$, $n\in\mathbf{N}^*$，求$\{a_n\}$的通项公式.

在初次接触题9、题10这样的综合性问题时，为防止学生束手无策，不妨进行如下"搭桥"：对于题9可以增加这样的小题：令$t=\sin x+\cos x$，将y表示成t的函数$f(t)$；对题10增加这样的小题：令$b_n=a_{n+1}-a_n$，证明：$\{b_n\}$是等比数列. 这样学生在解题时就有了方向感，从而增强了学生的学习信心. 当然随着学生思维水平的提高，我们在教学中可以逐步"拆桥"，以加强对学生抽象思维能力的培养.

行为主义的经典学习理论都是在实证的基础上得出，因而具有对一般学习规律的认识，但由于行为主义学习理论忽视对人内在的认知过程和情感作用的关注，这使它在指导教学时存在明显局限性，这是需要我们在教学中加以注意的.

参考文献

[1]张庆林. 当代认知心理学在教学中的应用[M]. 重庆：西南师范大学出版社，1995.

“编”让数学课堂更精彩

255120 山东省淄博淄川般阳中学 耿瑞照

一位优秀的数学教师不仅要懂知识、会解题，还要有“编”的能力，要会根据手中的资料，编性质、编习题. 当然，笔者所说的“编”，绝不是随意的胡编乱造，而是要达到“三有”：一是有意义，即所编题目、性质是有用的；二是有意思，即所编题目、性质有新意，让学生产生想掌握的冲动；三是有意味，即所编题目、性质有深度，让学生越读越有味道.

笔者也尝试着“编”了一些性质和题目. 这些编的性质和习题增强了学生数学探究能力. 下面是笔者所“编”过的两个案例.

1. 编应用题

教材上有这样一道题目：圆的直径为d，求它的内接矩形面积的最大值. 这道题目很简单，学生也很容易解答. 但笔者并没有满足于题目本身的解答，而是由这道题目联想到了校园中的花坛问题，因此在教学过程中把该题改编成了一类应用性的问题(见下面的4个问题).

问题1 校园内计划修建一个矩形花坛，并在花坛内装置一个喷水器(喷水器的喷水区域是一个圆面)，问如何设计花坛的尺寸和喷水器的位置，才能使花坛的面积最大且能全部喷到水?

问题1可借助不等式求解，学生很容易解答(如图1). 笔者再把题目增加难度改编成问题2.

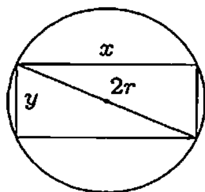


图 1

问题2 校园内计划修建一个矩形花坛，并在花坛内装置两个相同的喷水器，问如何设计花坛的尺寸和两个喷水器的位置，才能使花坛的面积最大且能全部喷到水?

解答问题2的关键是画出示意图(如图2)，画出图后用基本不等式即可求解. 这道题目彻底激发了学生探究此类问题的兴趣，于是笔者顺势把改编的问题3让学生探究.

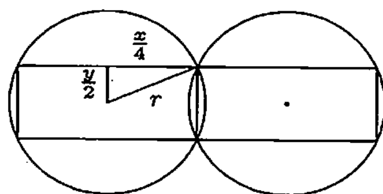


图 2

问题3 校园内计划修建一个矩形花坛，并在花坛内装置两个大小不同的喷水器(喷水区域的大小不同)，问如何设计花坛的尺寸和两个喷水器的位置，才能使花坛的面积最大且能全部喷到水?

问题3难住了很多同学，很多同学不能正确理解题意，不知道题目的图形应该怎样画. 于是笔者引导学生对题目进行了深入分析，两个不同的喷水器均在矩形花坛内，则两个喷水器有公共的喷水区域. 因此本题应分两种情况讨论：一种是小喷水器的喷水区域在大喷水器的喷水区域之内；另一种是两喷水器有共同的喷水区域但小喷水器的喷水区域并没有完全在大喷水器的喷水区域内. 对于第一种情况，即当小喷水器的喷水区域在大喷水器的喷水区域之内时，易知当矩形内接于大圆且该矩形为正方形时，矩形面积最大(如图3)，此时求解比较简单. 对于第二种情况(如图4)，需构建一个面积S关于z的函数$S=4z(\sqrt{R^2-z^2}+\sqrt{r^2-z^2})$，要求该函数的最值，需求出该函数的单调性，而单调性的求解须借助于导数. 通过本问题，学生对导数的作用、性质有了更深刻的理解，也对运算的重要性有了更深刻的理解. 学生经过不懈的努力，终于求解出了本题. 但笔者并没有因此而停止改编的步伐，又

把题目改编成具有开放性的问题4(笔者只是让学生讨论本题).

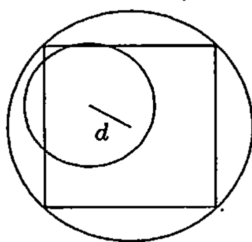


图3

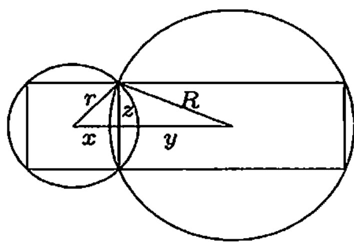


图4

问题4 校园内计划修建一个矩形花坛, 并在花坛内装置$n(n \geqslant 3)$个相同的喷水器(喷水区域是圆), 问如何设计花坛的尺寸和n个喷水器的位置, 才能使花坛的面积最大且能全部喷到水?

通过前面问题2的解答, 师生达成了共识: 当花坛中有n个喷水器时, 要得到面积最大的长方形, 只需要把n个内接正方形拼成一个矩形即可.

2. 编性质

有一道"过圆外一点向圆引两条相互垂直的切线"的问题, 笔者和学生根据得到的结果, 很容易总结归纳出下面的性质1, 并给出了证明.

性质1 圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$的两条互相垂直的切线m、n的交点P的轨迹方程是$(x-a)^2+(y-b)^2=2r^2$.

证明: 如图5, 易知四边形$APBO_1$为正方形, 所以$|PO_1|=\sqrt{2}|AO_1|=\sqrt{2}r$, 所以点$P$的轨迹是以$O_1$为圆心, $\sqrt{2}r$为半径的圆, 其方程是$(x-a)^2+(y-b)^2=2r^2$.

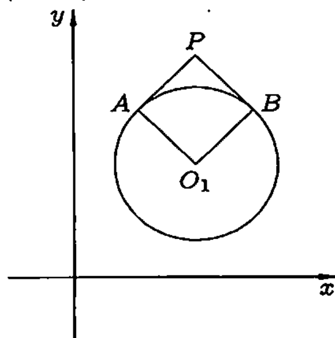


图5

得到性质1后, 笔者想到既然新课标教材把圆和椭圆、双曲线、抛物线统一成为圆锥曲线, 那么我们能否类比性质1得到椭圆、双曲线、抛物线的类似性质呢? 笔者把这个问题让学生探究、思考, 经过师生的共同努力, 我们依次得到了下面的3个性质:

性质2 抛物线$y^2=2px\,(p>0)$的两条互相垂直的切线m、n的交点M的轨迹方程为$x=-\dfrac{p}{2}$.

证明: 若其中一条切线过抛物线顶点, 则与之垂直的另一条切线不存在, 所以两切线的斜率必存在. 设点M坐标为(x_0,y_0), 并设一条切线的斜率为k, 则两切线方程为$y-y_0=k(x-x_0)$和$y-y_0=-\dfrac{1}{k}(x-x_0)$.

由$\begin{cases} y-y_0=k(x-x_0), \\ y^2=2px, \end{cases}$得

$$\frac{k}{2p}y^2-y+y_0-kx_0=0.$$

根据题意得

$$\Delta_1=1-\frac{2k}{p}(y_0-kx_0)=0. \quad ①$$

由$\begin{cases} y-y_0=-\dfrac{1}{k}(x-x_0), \\ y^2=2px, \end{cases}$得

$$\frac{1}{2pk}y^2+y-\left(y_0+\frac{x_0}{k}\right)=0.$$

根据题意得

$$\Delta_2=1+\frac{2}{kp}\left(y_0+\frac{x_0}{k}\right)=0. \quad ②$$

$$由① - ②得 y_0=\left(k-\frac{1}{k}\right)x_0. \quad ③$$

把③代入①得

$$1-\frac{2k}{p}\left(kx_0-\frac{x_0}{k}-kx_0\right)=0.$$

解得$x_0=-\dfrac{p}{2}$. 所以点M的轨迹方程为$x=-\dfrac{p}{2}$.

性质3 设直线m、n都是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的切线, 且$m\perp n$, m、n交于点P, 则点P的轨迹方程是$x^2+y^2=a^2+b^2$.

证明: (1) 当切线斜率存在时, 设$y=kx+l$为椭圆的切线, 由$\begin{cases} y=kx+l, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \end{cases}$得

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)x^2+\frac{2lk}{b^2}x+\frac{l^2}{b^2}-1=0.$$

由$\Delta=0$得$l^2=b^2+a^2k^2$,

所以$l=\pm\sqrt{b^2+a^2k^2}$, 所以两垂直切线为

(下转第6-9页)

关于"三角函数的诱导公式"的教材和教学比较

225600 江苏省高邮中学 黄桂君

笔者曾主持过扬州市教育科学"十五"规划课题《中学数学教学策略比较研究》的研究，目前正在进行江苏省教育科学"十二五"规划专项立项课题《基于MPCK的高中数学教学策略研究》的研究. 本话题是基于课题的研究，本文就是我们开展了"同课异构"的教研活动，通过课堂的实际情况和教学效果进行的比较分析和反思总结.

一、教材比较

1. 基于人教版老教材[1]中"正、余弦的诱导公式"的推导. 假定α为任意角，其终边与单位圆相交于点$P(x,y)$，由于角$180^\circ+\alpha$的终边就是角α终边的反向延长线，其终边与单位圆相交于点P'，点P'与点P关于原点O对称，则点P'的坐标是$(-x,-y)$. 又因为单位圆的半径$r=1$，由正、余弦函数的定义，可得$\sin\alpha=y,\cos\alpha=x,\sin(180^\circ+\alpha)=-y,\cos(180^\circ+\alpha)=-x$，所以，$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$，$\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$.

类似的，根据α与$-\alpha$的终边关于x轴的对称性及三角函数的定义，得到$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$，$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$. 并由此推得其他诱导公式.

这节课上下来，除了怎么想到和运用角$\frac{\pi}{2}-\alpha$的终边与角α的终边关于直线$y=x$对称，及其两对称点坐标之间的关系有难度外(这是难点，原教材是放在后面两角和与差的三角函数中讲的，我们按新课程标准的要求进行了调整)，学生没感觉有什么困难.

2. 基于人教版A版新教材[2]中"三角函数的诱导公式"的导入. 先要求学生思考：我们利用单位圆定义了三角函数，而圆具有很好的对称性，能否利用圆的这种对称性来研究三角函数的性质呢？例如，能否从单位圆关于x轴、y轴、直线$y=x$的轴对称性，以及关于原点O的对称性等出发，获得一些三角函数的性质呢？

给定一个角α. 角$\pi-\alpha$、$\pi+\alpha$、$-\alpha$、$\frac{\pi}{2}-\alpha$的终边与角α的终边有什么关系？它们的三角函数之间有什么关系？

由单位圆上具有某对称性的点的坐标之间的关系，任意角三角函数的定义，同上可推出相应的诱导公式.

这节课的特色是导入的问题串设计得比较好，击中要点. 其余情况同上面基本一样，如难点，教材中虽说根据图形不难发现，其实学生还是有困难的.

3. 基于人教版B版新教材[3]中"诱导公式"的传授. 除指出了角α与$\alpha+k\cdot2\pi\ (k\in\mathbf{Z})$的三角函数间的关系(根据定义)，以及讨论了角$\alpha$与$-\alpha$的三角函数间的关系(同上)外，特别研究了：

(1) 角α与$\alpha+(2k+1)\pi\ (k\in\mathbf{Z})$的三角函数间的关系，由特殊角$\alpha+\pi$与$\alpha-\pi$，$\alpha+3\pi$，$\alpha-3\pi$，$\cdots$，$\alpha+(2k+1)\pi\ (k\in\mathbf{Z})$的终边相同，则它们的三角函数值也相等，得出$\cos[\alpha+(2k+1)\pi]=-\cos\alpha$，$\sin[\alpha+(2k+1)\pi]=-\sin\alpha$，$\tan[\alpha+(2k+1)\pi]=\tan\alpha$，并总结得

$$\sin(\alpha+n\pi)=\begin{cases}-\sin\alpha, & \text{当}n\text{为奇数},\\ \sin\alpha, & \text{当}n\text{为偶数},\end{cases}$$

$$\cos(\alpha+n\pi)=\begin{cases}-\cos\alpha, & \text{当}n\text{为奇数},\\ \cos\alpha, & \text{当}n\text{为偶数},\end{cases}$$

$$\tan(\alpha+n\pi)=\tan\alpha\ (n\in\mathbf{Z}).$$

进而再特殊化：两个互为补角的正弦值相等$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，余弦是互为相反数$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$. 这是一种侧重于代数方法的新思路.

(2) 关于角α与$\alpha+\frac{\pi}{2}$的三角函数间的关系. 因为点P关于直线$y=x$的轴对称点的坐标为$M(\sin\alpha,\cos\alpha)$，点M关于y轴的对称点的坐标为$N(-\sin\alpha,\cos\alpha)$. 点$P$经过以上两次轴对称变换到达点$N$，等同于单位圆作了一次旋转（如

图1), 旋转的大小为$2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+2\alpha=\frac{\pi}{2}$, 所以有

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha, \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,$$

进而可得其他的公式.

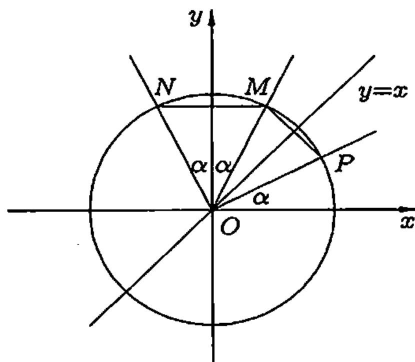


图 1

这节课的特点是突出了角α与$\alpha+n\pi\ (n\in \mathbf{Z})$的三角函数间的关系. 推陈出新"化解"了一个难点, 当然怎么想到的对于学生而言也是个疑问.

4. 基于北师大版新教材[4]中的有关三角函数诱导公式的特别安排. 诱导公式被分散安排在正弦、余弦函数的定义及其图像之后, 即在性质中渗透, 别具一格. 一方面通过角$\pm\alpha$、$2\pi\pm\alpha$、$\pi\pm\alpha$的终边与单位圆的交点间的对称性及坐标之间的关系(同上)发现, 另一方面当α为锐角时也可通过图像(如图2)直观看出, 如$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$等.

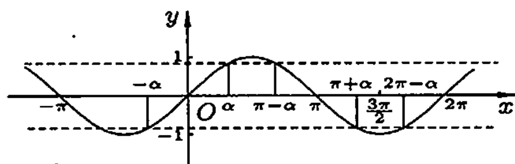


图 2

再通过"思考交流"要求学生根据三角函数的定义, 或验证, 或根据"信息技术建议"绘出三角函数图形后归纳得出诱导公式.

对于正切函数, 当$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$时, 根据其图像, 仿上正弦函数图像也很容易观察得出, 如$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$. 并建议有兴趣的学生再验证其他象限角或借助信息技术绘图归纳得出.

关于$\frac{\pi}{2}+\alpha$的正、余弦诱导公式, 通过α为锐角时, 它们的终边与单位圆的交点及交点在轴上的射影、坐标原点构成的两个直角三角形全等, 由三角函数定义和点的横、纵坐标绝对值相等而推得. 然后要求有兴趣的学生对α无论是哪个象限角时验证(不完全归纳)都是正确的. "问题与思考"则要求学生验证$\frac{\pi}{2}-\alpha$的正、余弦诱导公式.

这节课是我们在苏教版新教材[5]讲过正切函数后进行的一次试验课(因为内容分散安排, 且在"同角三角函数的基本关系"前, 所以放到了这个时候实验研究一下), 其与众不同的地方是利用了三角函数线和三角函数的图像即数形结合的思想, 特殊到一般、归纳推理等令人耳目一新的方法推导出诱导公式, 通过验证、不完全归纳化解了难点.

5. 基于苏教版新教材[5]中"三角函数的诱导公式"的设计. 是这样推出的: 如果α的终边与角β的终边关于x轴对称, 那么α与β的三角函数值之间有什么关系?

设角α、β的终边分别与单位圆交于点P、P', 则点P和P'关于x轴对称(如图3). 又根据三角函数的定义, 点P的坐标是$(\cos\alpha,\sin\alpha)$, 点P'的坐标是$(\cos\beta,\sin\beta)$. 故有

$$\sin\beta=-\sin\alpha, \cos\beta=\cos\alpha.$$

由同角三角函数关系得

$$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha.$$

特别地, 角$-\alpha$与角α的终边关于x轴对称, 故有$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha, \cos(-\alpha)=\cos\alpha$, $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$. $\pi\pm\alpha$的诱导公式由学生自己推导.

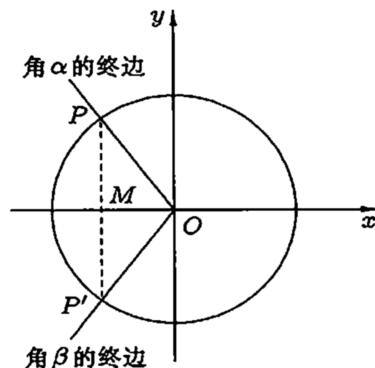


图 3

关于难点: 若角α的终边与角β的终边关于直线$y=x$对称(如图4), 则有点P和P'关于直线$y=x$对称.

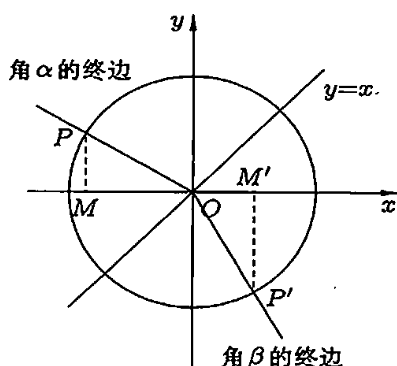


图 4

$$故\begin{cases}\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}=\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{2},\\ \dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=-1,\end{cases}$$

由此解得$\cos\alpha=\sin\beta,\sin\alpha=\cos\beta$. 特别地, 角$\alpha$与角$\frac{\pi}{2}-\alpha$的终边关于直线$y=x$对称, 因此,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

这节课的实际情况是, 在用一般三角函数关系式刻画任意角α的终边与角β的终边具有某对称性时有难度, 学生一时难以到位. 如关于直线$y=x$对称的两点间的坐标关系, 苏教版必修2 P.94第20题已给出了结论, 本节课是必修4中的内容, 所以教材[5]用斜率来处理就很自然. 问题是现在大多数学校对必修教材是按照1、4、5、2、3的顺序, 而非按照1、2、3、4、5的顺序来教学的. 我们是通过几个特例及其几何直观引导学生得到的, 回避了用斜率的方法. 后来重温这种方法, 感觉似乎"兜了个小圈子".

6. 基于湘教版新教材[6]中"诱导公式"的引出. 这是通过6个例题(当中有通过求具体三角函数值提炼的)而得出的:

如例1求下列三角函数值:

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; (2) $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)$; (3) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

自然引入话题(学习的必要性), 通过联系和画图发现$-\frac{\pi}{6}$与$\frac{\pi}{6}$的终边、$\frac{5\pi}{4}$与$\frac{\pi}{4}$的终边、$\frac{2\pi}{3}$与$\frac{\pi}{3}$的终边的位置关系. 例2一般化推出$-\alpha$, $\pi\pm\alpha$的诱导公式, 例3要求利用例2得到的公式重新求例1中各三角函数值(数学公式是有用的). 例6设问由初中互余的两个锐角α与$\frac{\pi}{2}-\alpha$间的正、余弦的关系式, 是否对任意角α成立呢? 指出由于角α与角$\frac{\pi}{2}-\alpha$的平均值

$$\frac{1}{2}\left[\alpha+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=\frac{\pi}{4},$$

所以角α的终边与角$\frac{\pi}{2}-\alpha$的终边关于角$\frac{\pi}{4}$的终边所在的直线$y=x$对称, 根据这两个角的终边与单位圆的交点坐标关系及三角函数的定义得

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

其他公式由学生根据课本中的"想一想", "请尝试自己推导".

这节课的亮点是问题引出自然, 从特殊到一般, 也给出了一个"解决难点"的方法, 同样学生如何理解也是个疑问.

二、笔者的教学设计

基于上述对比分析, 这节内容突出了对称的思想, 任意角三角函数的定义. 让学生感受和体验用三角函数的语言刻画圆上点的对称性等! 因而笔者的教学设计是:

(1) 先通过教材[6]中例1求有关具体三角函数值的实际需要, 自然提炼出一般的问题;

(2) 用教材[2]中的问题串来启发引导学生进行思考、讨论、发现;

(3) 然后在教材[5]中选择一个对称性, 如探究出任意角α的终边与角β的终边关于y轴对称的三角函数之间的代数关系, 让学生理解数学的本质, 再用特殊角代换;

(4) 最后将其他的诱导公式用教材[1]、[2]、[4]中的方法简单直接得到, 或由学生根据其他三角函数公式及已推得的诱导公式等推出.

其中关于难点: $\frac{\pi}{2}+\alpha$或$\frac{\pi}{2}-\alpha$的诱导公式的推导(新课程提到前面来了)采用教材[4]中的符合学生认知水平的方法, 或预先通过多举一些特例画图、引导理解教材[3]和教材[6]中的方法.

三、课题研究与活动体会

三角函数诱导公式的实质是"单位圆的对称性的解析表达", 而且是"特殊的对称性"——关于圆心(原点)、坐标轴、直线$y=x$、直线$y=-x$对称. 这样诱导公式的整体性(以单位圆为载体)是一个需要关注的问题, 这正是教材[2]等的主要关注点. 教材[1]、[2]与[4]直接明了简单快捷!

教材[5]虽然间接了点，"绕了点弯"，但后来就水到渠成了．教学的处理可以有多样性，不过最终要让学生形成完整的认知结构，所以各有特色，这也在2007年11月扬州市高中数学教研员公开课比赛的活动中得到了体现．所以不能简单地说哪个方法好(我就采用)，哪个方法不好(我就不用)，或将$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$放后讲等，事实说明重新设计后的课堂教学更有灵活性和效果．

现在不少教师甚至是骨干教师，认为教研活动难搞，课题研究更是空的；集体备课活动难开展，好一点是备课者带着材料来，其他人带着材料走．笔者认为目前有效的方式是案例比较研究，如"同课异构"；评议某老师的一节课；讨论某老师编写的一份教案；研究一份试卷；学习制作一个课件；讨论一两个学科难题(典型问题、考题)、学生易错或难以理解和接受的问题(实验等)；弄几道优秀的试题、考题大家做做、讨论、欣赏、谈谈感受等；学一篇学科期刊上的理论文章、解题教学文章、课例点评文章等；或请外出参观、开会、学习回来的老师汇报情况，谈感受体会等．

参考文献

[1] 中学数学室编著．全日制普通高级中学教科书(试验修订本·必修)数学第一册(下)[M]．北京：人民教育出版社，2000.

[2] 刘绍学主编．普通高中课程标准实验教科书数学A版必修4[M]．北京：人民教育出版社，2007.

[3] 高存明主编．普通高中课程标准实验教科书数学B版必修4[M]．北京：人民教育出版社，2004.

[4] 课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著．普通高中课程标准实验教科书·数学必修4[M]．北京：北京师范大学出版社，2004.

[5] 苏教版新课程编写组编写．普通高中课程标准实验教科书·数学4(必修)[M]．南京：江苏教育出版社，2007.

[6] 湘教版新课程编写组编写．普通高中课程标准实验教科书(必修)数学第二册[M]．长沙：湖南教育出版社，2005.

(上接第6-5页)

$m: y=kx\pm\sqrt{b^2+a^2k^2}$,

$n: y=-\frac{x}{k}\pm\sqrt{b^2+\frac{a^2}{k^2}}$,

可化为$(y-kx)^2=b^2+a^2k^2$,

$(ky+x)^2=a^2+b^2k^2$.

两式相加得$x^2+y^2=a^2+b^2$.

(2)当一条切线斜率不存在时，易得$m: x=\pm a, n: y=\pm b$，也满足$x^2+y^2=a^2+b^2$.

综上所述，点P轨迹方程为$x^2+y^2=a^2+b^2$.

性质4　设直线m、n都是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的切线，且$m\perp n$，$m$、$n$交于点$P$，则点$P$的轨迹方程为$x^2+y^2=a^2-b^2$.

证明：当一条切线的斜率不存在时，该切线必然经过双曲线实轴上的顶点，这时与之垂直的另一条切线不存在．已知m、n是垂直切线，所以斜率必然都存在．设$y=kx+l$为双曲线的一条切线，则由$\begin{cases} y=kx+l, \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \end{cases}$得

$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}\right)x^2-\frac{2lk}{b^2}x-\frac{l^2}{b^2}-1=0.\cdots$ ①．

由于k为双曲线切线的斜率，故$|k|>\frac{b}{a}$，所以$k^2>\frac{b^2}{a^2}$，所以$\frac{1}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}\neq 0$.

由①中$\Delta=0$得$l^2=a^2k^2-b^2$，所以$l=\pm\sqrt{a^2k^2-b^2}$，所以两垂直的切线为

$m: y=kx\pm\sqrt{a^2k^2-b^2}$,

$n: y=-\frac{1}{k}x\pm\sqrt{\frac{a^2}{k^2}-b^2}$.

$m: y=kx\pm\sqrt{a^2k^2-b^2}$可变形为

$(y-kx)^2=a^2k^2-b^2$. ……………………… ②

$n: y=-\frac{1}{k}x\pm\sqrt{\frac{a^2}{k^2}-b^2}$可变形为

$(yk+x)^2=a^2-b^2k^2$. ……………………… ③

②+③得$x^2+y^2=a^2-b^2$，所以点P的轨迹方程为$x^2+y^2=a^2-b^2$.

其实，"编"并不难，只要我们有一双善于发现问题的眼睛和一颗追求真理的心，我们就一定可以编出课本上没有的题，编出课本上学不到的性质；就可以编出学生的求知欲和进取心，编出精彩的课堂！

编制初中数学原创题的几点反思

332000 江西省九江市第十一中学 陶增元

一个生活场景或一个好创意都可能产生一道经典的数学试题. 数学试题应当有生活味, 它不能脱离现实生活, 给学生一个假、大、空的感觉. 同时, 试题也应符合数学的特点, 探索题应当具有探索的价值, 太难或太易都会使得试题失去数学味或考查的价值. 概率试题应当符合概率事件本身的特点, 不能违背概率的这些特点, 否则会成为错题. 下面是笔者在编制试题时的一些反思.

反思之一: 命制的试题应有生活味

数学来源于生活, 又服务于生活. 将数学试题与现实生活紧密相联, 让试题具有生活味, 可以让学生感觉到数学就在我们身边, 就在我们的日常生活中. 与现实生活相关联的试题不仅可以是应用题, 同样可以是统计题、概率题、几何题等. 千万不能为了编题而脱离生活实际, 远离学生的生活, 给学生一种虚无缥缈、空洞的感觉.

例1 为提高棉花的产量, 棉农要采用间苗的方法. 在未采用间苗技术以前, 每亩地可种植棉株2万棵, 每棵棉株可产棉桃30个, 若采用间苗技术, 平均每拔除1000棵棉株, 可使每棵棉株平均增加5个棉桃.

(1) 要想每亩总产量达到800万个棉桃, 则需要拔除多少棵棉株?

(2) 当拔除多少棵棉株时, 棉花的产量最高?

学生在学习的过程中, 已经见过太多的"降价、销量增加"或"涨价、销量减少"这一类的习题, 他们的头脑中已经形成了用固定的模式来思考问题, 解决问题, 用这种固定套路解答的试题并不能真正考查学生的建模能力, 基于这样的考虑, 就改换了一种问题背景, 命制出了例1. 但这道题在出炉后, 考虑再三, 还是认为这道题并不合适, 它不仅是城市学生非常陌生的生活场景, 同时也是现在的农村学生同样不熟悉的场景, 并且题中所有的数据均是人为编造, 是闭门造车的产物. 它仅仅是为了编题而编题, 远离了现实生活, 缺少生活味.

例2 某单位在一次评选中, 要从6名候选人中选出三名先进个人, 并进行排序, 单位负责人采用了一种快捷的统计方法: 本单位职工每人限投一票, 票上所选人数不限, 但必须按顺序排位. 统计时, 按每位候选人的得票数与得票分数分别进行排序, 得票分数的统计方法是: 每张选票上的名次即为该候选人所得的分数, 如: 第一名得1分, 第二名得2分, 其余依此类推, 落选者不得分, 最后统计结果的得票分数按从低到高取前三名, 即得分最低者第一名, 得分次低者第二名, 得分最高者最后一名.

(1) 统计结果显示, 得票数第二名的候选人按得票分数排位为第六名, 差异太大, 单位负责人大惑不解: 这到底是怎么回事? 请你帮助他分析一下: 按得票数排序与按得票分数排序为什么会有一个矛盾的结果呢?

(2) 这种统计方法是否合理? 如果不合理, 请你改进统计方法, 使它更趋于合理.

这是笔者亲身经历的一件事, 由于当时的负责人不懂统计而导致她用一种错误的统计方法统计出了一个错误的结果. 笔者将这件源于生活的真实事例编成了一道统计题, 题中没有一名候选人的数据出现, 有的只是统计方法的描述, 它仅要求学生找出出现矛盾的两种结果的原因, 并改进统计方法, 它不是考查学生对统计数据的处理能力, 而是考查学生对统计方法的理解程度. 只要学生真正理解了统计的涵义, 解答此题就变得非常简单. 让学生在将来的工作中学会用正确的统计方法进行统计也是我们数学教师的责任.

命制的试题的背景应当来自于学生所能理解的生活现实, 能够在当今学生的实际生活中找

到原型, 避免在试题的背景或解答中出现与生活经验或其他科学原理相悖的情形[1].

反思之二: 命制的试题应有数学味

《数学课程标准》在总体目标中要求"通过义务教育阶段的数学学习, 学生能够初步学会运用数学的思维方式去观察、分析现实社会, 去解决日常生活中和其他学科学习中的问题, 增强应用数学的意识"[2].

由这段文字可知, 数学教学的核心是"思维". 因此编制的数学试题应体现数学的抽象性、推理性、探索性、问题性及数学语言表达等特点, 要达到能让学生主动思考的目的, 能考查到学生的总结概括、归纳推理能力, 也就是要求试题应有数学味.

例3 某课外学习小组在一次学习研讨中, 得到了如下两个命题:

① 如图1, 对角线互相垂直的平行四边形的面积等于两条对角线长的乘积的一半;

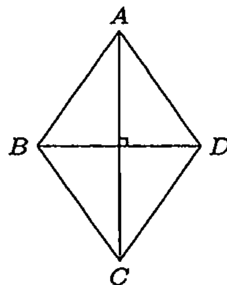


图1

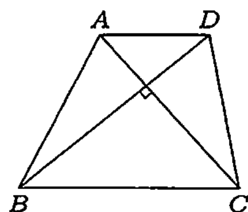


图2

② 如图2, 对角线互相垂直的梯形的面积等于两条对角线长的乘积的一半.

然后, 他们运用类比的思想提出了如下命题:

③ 如图3, 对角线互相垂直的任意四边形的面积等于两条对角线长的乘积的一半.

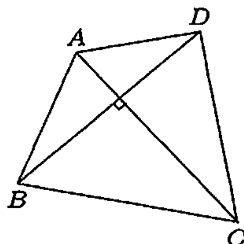


图3

任务要求: (1) 证明命题 ②;

(2) 命题 ③ 成立吗? 如果成立, 请证明, 如果不成立, 请说明理由.

这道题在出炉以后, 从表面看, 很有点课题学习的"架势". 但仔细品味该题的答案发现, 三个命题的证明方法与证明过程如出一辙, 没有从易到难、层层递进, 给人一种向纵深发展的感觉, 缺乏探索的价值, 少了点数学味, 因此, 只能把此题束之高阁.

例4 多多带着一只小狗以3米/秒的速度在跑步, 发现前方33米处有一根骨头, 小狗以6米/秒的速度冲上前去, 多多继续以原速度前进, 小狗到达了目的地后, 花了1秒钟的时间叼到骨头, 然后迅速掉头, 仍以6米/秒的速度回到多多身边. 求小狗从离开多多到与多多重新会合, 花了多长时间?

这是学生非常熟悉的生活场景, 有很强的趣味性和很浓的生活味. 很多学生根据自己的理解列出的方程是$6(t-1)+3t=33$. 但仔细思索之余, 我们发现, 要想解决好这道题, 需要借助图解法, 才能较好地将这一实际问题转化为数学模型, 才能正确地列出方程$6(t-1)+3t=33\times 2$, 此题既有很浓的数学味, 又考查了学生的建模能力.

一道数学试题, 总要有一两个能引起学生思考的、有价值的数学问题, 才能有效地引导学生学习数学. 我们不能为了突出数学的生活味而忽视了试题的数学味, 试题的生活味是辅, 数学味是主.

反思之三: 命制的概率题应符合概率事件的特点

随着社会的不断发展, 概率的思想方法也越来越重要, 让学生了解随机现象有助于他们形成科学的世界观和方法论[3]. 概率事件的一个显著特点是随机性, 另一方面, 中学阶段学习的是古典概率, 特点是基本事件具有等可能性. 如果不注意到概率事件的这些特点, 在编制试题时就有可能出现纰漏, 甚至是错题.

例5 某电视台为了与观众互动, 设计了一个如图4所示的游戏框, 标有字母的部分是小球的可能入口, 图中"T"字为小球挡板, 以保证小球只能从入口处下落, 如果观众从适当远的地方随机将小球投向这个游戏框, 试画出树状图说明: 小球最终落在最下面的四个区域的概率是不是相同? 如果不是, 请说明落在哪个区域的概率最大? 落在哪个区域的概率最小? 概率分别是多少?

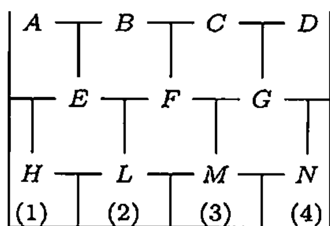


图 4

这是根据当时某个电视台热点播出的游戏进行编制的一道题. 在这道题出炉以后, 笔者的自我感觉良好, 认为这道题新颖、有趣, 符合生活现实, 观众从适当远的地方投掷小球也具有随机性, 并且也通过了编辑的审查. 但在用这道题考查学生时, 有一位老师发现了问题, 认为该题有错. 信息反馈到笔者处, 经过仔细分析发现, 观众从适当远的地方投掷小球都是尽可能投向中间, 不具有随机性. 即使改为观众是蒙着眼睛投掷, 使得事件具有随机性, 但小球从A、B、C、D四处落下的可能性也不相等. 因为A、B、C、D四个空缺处的距离相等, 如果小球直接扔到这个缺口, 其可能性相同, 但如果扔到"T"字挡板上, 则从A、D处落下分别只有一种可能, 而小球从B、C处落下就分别有两种可能, 也就是从A、B、C、D四个空缺处落下的可能性不相等. 因此, 此题失去了考查学生的意义.

例6　小敏到超市买了两种蔬菜, 这两种蔬菜应付的价钱分别是11.23元和5.64元, 而超市的规定是"五舍六入", 即价钱的最后一位数"分"按"五舍六入"计价到角, 如果把这两种菜分别计价, 则小敏应付16.8元, 对小敏有利; 如果把这两种菜合在一起计价, 则小敏应付16.9元, 对小敏不利. 由此, 小敏产生一个疑问, 对于顾客而言, 以顾客买两种菜为例, 哪一种计价方式更有利(即顾客少付钱)呢?

(1) 分别计价时, 与原价相比, 顾客能够少付钱的概率是多少?

(2) 合计计价时, 与原价相比, 顾客能够少付钱的概率是多少? 试列出表格或画出树状图说明.

这是一道与我们的日常生活息息相关的试题, 由于所购买的蔬菜价格的"分"位到底是几, 这是买蔬菜前无法预计的, "分"位上的数字是随机出现的, 因此这个事件是随机事件. "分"位上可能出现的十个数字的可能性是相等的, 因此, 这个概率事件符合命题的要求. 通过列表或画树状图可求出分别计价与合计计价时, 顾客能少付钱的概率均为0.5, 两种计价方式均同样有利.

编制的概率试题要着眼于对学生的概率思想的考查, 关注对学生能力的培养和概率思想的渗透, 所选取的素材应当是初中学生所熟悉的生活场景, 应能被他们所理解, 同时编制的概率试题也应该符合概率事件本身的特点, 才能使试题有较好的效度.

反思之四: 命制的试题应关注考查的有效性

由于课程标准对平面几何作了较大的调整, 作为中考中传统难点的几何推理论证已被大大削弱, 取而代之的是观察与比较、操作与解释等新颖的几何考题. 这类考题是通过动手操作、图形的旋转、翻折运动及文字语言、符号语言、图形语言的转换等, 引导我们切切实实让学生体验学习的过程, 重视知识的发生过程, 而不是死记硬背.[4] 因此编制的这类几何探索题应有助于考查学生的探究能力, 提高学生的数学素养, 但编制的试题一定要循序渐进、有梯度地逐渐增加难度, 充分体现不同的学生在数学上得到不同的发展这一目的, 不可太难或太易, 否则会使编制的试题失去考查的有效性.

例7　某课外学习小组发现了如下结论:

(1) 如图5, 在正$\triangle ABC$中, D、E分别是边AB、AC的中点, F、G分别是BD、EC的中点, 易证$\triangle AFG$是等边三角形. 若将$\triangle ADE$绕A点顺时针方向旋转到图6的位置, 其他条件不变, 判断$\triangle AFG$的形状, 并证明.

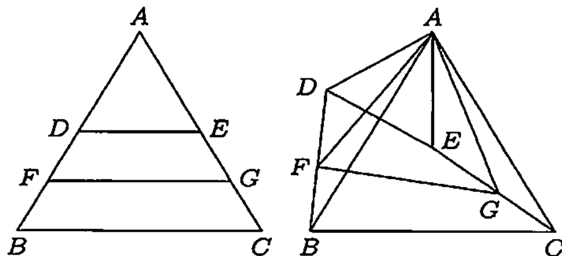


图 5　　图 6

(2) 如图7, 在正方形$ABCD$中, E、G分别是边AB、AD的中点, 四边形$AEFG$仍是正方形, H、M、N分别是EB、FC, GD的中点, 易证四边形$AHMN$是正方形. 若将正方形$AEFG$绕A点顺时针方向旋转到图8的位置, 其他条件不变, 判断四边形$AHMN$的形状, 并证明.

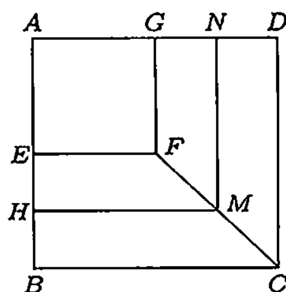


图 7

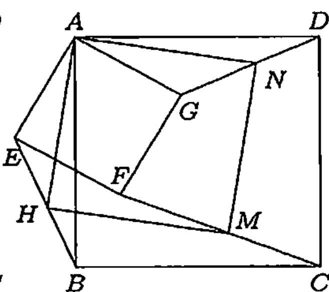


图 8

命制这道题的本意是让学生在解题的过程中领会类比思想的妙用, 在类似的条件下, 不仅结论可以类比得到, 而且证明过程也可以类比得到. 在解题时, 第(1)小题的结论很快得到了证明, 但第(2)小题的证明却卡壳了: 第(1)小题可以证明$\triangle ADB\cong\triangle AEC$, 然后用全等三角形对应边的中线相等得到$AF=AG$, 并且能证明到$\angle FAG=60°$, 于是$\triangle AFG$是等边三角形. 但证明第(2)小题时用类比的方法只能证明到$AH=AN$, $\angle HAN=90°$, 再也证明不出其他的边与AH相等. 请求同事帮助也没有下文, 通过几何画板验证此结论是正确的, 利用解析几何的方法证明也是正确的, 但用初中几何的方法无法证明. 于是, 笔者试着向学生发出英雄贴, 终于在第三天, 一名女同学在她父亲的帮助下一共添加了5条辅助线才解决了这一难题. 笔者在大力表扬这名同学以后选择了放弃这道题, 因为这道题太难, 连老师在长时间内都无法解决的试题, 更遑论学生在区区两个小时内解决. 一套试卷的优劣不是看它考倒了多少学生, 而应该是在有一定的区分度的基础上, 让学生对数学学习充满了信心和战胜它的勇气. 因此笔者将这道题重新编制, 变成了以下例题:

例8　如图9, 在$\triangle ABC$中, D、E分别是AB、AC的中点, F、G分别是DB、EC的中点.

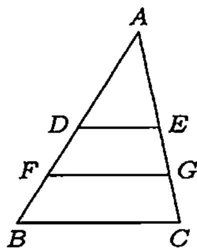


图 9

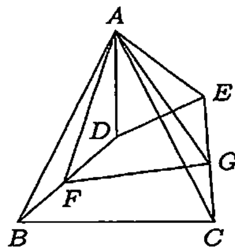


图 10

(1) 易证$\triangle AFG\backsim\triangle ABC$, 其相似比为____;

(2) 若$AB=AC$, 将$\triangle ADE$绕A点逆时针方向旋转到如图10的位置, 判断$\triangle AFG$的形状, 并证明;

(3) 若$AB\neq AC$, 将$\triangle ADE$绕A点逆时针方向旋转到如图11的位置, $\triangle AFG$与$\triangle ABC$有什么关系? 请说明理由.

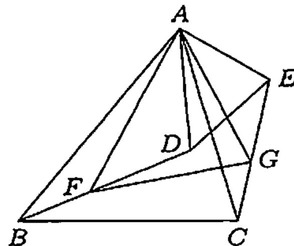


图 11

(4) 在(3)的条件下, 若旋转角为90°, 试探究$\triangle AFG$与$\triangle ABC$之间存在什么数量关系? 画出图形, 写出探究过程.

经过改编后的试题呈现了从易到难的梯度, 在解答第(2)小题到第(3)小题时尽管结论不能类比得出, 但证明过程可以采用类比方法, 第(2)小题可证明$\triangle ABD\cong\triangle ACE$. 第(3)小题可以类比证明$\triangle ABD\backsim\triangle ACE$, 从而得出$\frac{AF}{AG}=\frac{AB}{AC}$, 且夹角相等, 比较容易得出$\triangle AFG\backsim\triangle ABC$. 第(4)小题则着重考查了学生的猜想、探究、逻辑推理、计算能力以及数形结合的思想. 在这一题中有简单问题, 有中等难度的问题, 也有考查学生数学思想、数学能力的较难问题, 但又不是让绝大多数学生望而生畏的难题, 体现了"人人在数学上得到不同的发展"的理念.

编制的数学探究题应当能有效地考查学生数学能力与数学素养, 不能太难, 否则学生望尘莫及; 太容易, 学生不需要动脑筋就能解决, 也起不到培养思维能力的作用. 所命制的习题应该具有层次性, 不同学习能力程度的学生, 都能够动手, 以调动全体学生的学习积极性.

参考文献

[1] 教育部考试制度改革项目组. 中考命题指导[M]. 南京: 江苏教育出版社, 2005.

[2] 国家教育部. 数学课程标准[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2001.

[3] 数学课程标准研制组. 数学课程标准解读[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2002.

[4] 华夏素质教育研究所. 2006年全国中考数学评价报告[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2007.

一道背景显赫的平面几何题

236800　安徽省亳州市第一中学　史　嘉

题：在直角$\triangle ABC$的斜边AB上向形外作正方形$ABDE$，设$\angle ACE=\alpha, \angle ECD=\beta$，$\angle DCB=\gamma$(如图1)，证明：$\cos\beta=\cos\alpha\cos\gamma$.

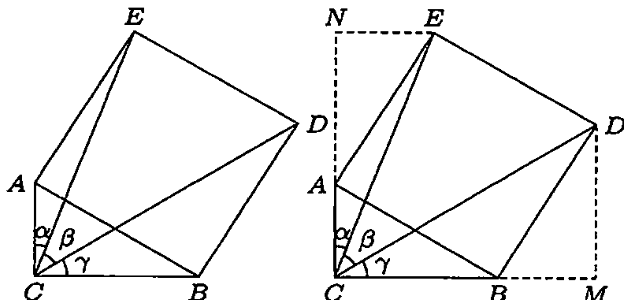


图 1　　　　图 2

笔者首先想到利用三个角的关系$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$把$\cos\beta=\cos\alpha\cos\gamma$转化为$\sin(\alpha+\gamma)=\cos\alpha\cos\gamma=\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma$，再转化为$\tan\alpha+\tan\gamma=1$，进而构造直角三角形.

证明：如图2，作$DM\perp CB$于点M，$EN\perp CA$于点N.

易证$\triangle EAN\cong\triangle ABC\cong\triangle BDM$，

有$AN=BC=DM, NE=CA=BM$，$CN=CM$.

而$\cos\beta=\cos\alpha\cos\gamma\Longleftrightarrow\tan\alpha+\tan\gamma=1$，

$\tan\alpha+\tan\gamma=\frac{NE}{CN}+\frac{DM}{CM}=\frac{CA}{CN}+\frac{AN}{CN}=1$，即得证.

若把另一个角补充完整，居然挖掘出该题的显赫背景——数学中的绝对大牌明星——弦图(图3). 到此，自然想到若把题中"向形外作正方形$ABDE$"改为"向形内作正方形$ABDE$"，$\cos\beta=\cos\alpha\cos\gamma$还会成立吗？试试看，如图4，在直角$\triangle ABC$的斜边$AB$上向形内作正方形$ABDE$，设$\angle ACE=\alpha, \angle ECD=\beta, \angle DCB=\gamma$. 根据$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3\pi}{2}$知这三个角中至少有一个不小于$\frac{\pi}{2}$，所以猜想应该有$\cos\beta=-\cos\alpha\cos\gamma$.

证明：作$DM\perp CB$于点M，$EP\perp DM$于点P，$CN\perp EP$于点N. 易证$CNPM$为正方

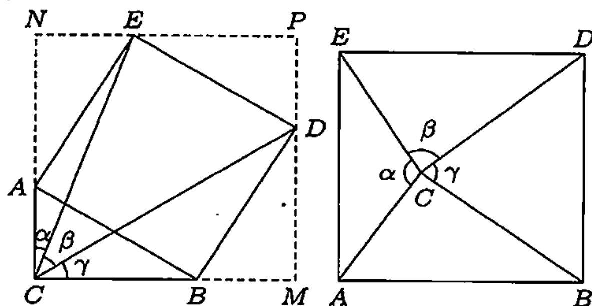


图 3　　　　图 4

形，且$NE=DP$，如图5.

因为$\cos\beta=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha-\gamma\right)$
$=-\sin(\alpha+\gamma)$

所以$\cos\beta=-\cos\alpha\cos\gamma\Longleftrightarrow\sin(\alpha+\gamma)=\cos\alpha\cos\gamma\Longleftrightarrow\tan\alpha+\tan\gamma=1$，

而$\tan\alpha+\tan\gamma=-\tan\angle ECN+\frac{DM}{CM}=-\frac{NE}{CN}+\frac{DM}{CN}=\frac{DM-NE}{CN}=1$，即得证.

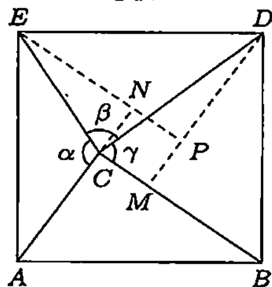


图 5

把上述两题合二为一：以直角$\triangle ABC$的斜边AB为边长作正方形$ABDE$，设$\angle ACE=\alpha$，$\angle ECD=\beta, \angle DCB=\gamma$，证明：$\cos\alpha\cos\gamma=\pm\cos\beta$.

或者：以非等腰直角$\triangle ABC$的斜边AB为边长作正方形$ABDE$，设$\angle ACE=\alpha, \angle DCB=\gamma$，证明：$\tan\alpha+\tan\gamma=1$.

(下转封底)

对课本经典例题的研究与联想

200135 上海市进才中学 魏明志

与其说数学教师教学生学习数学，不如说数学教师引领学生一同走进数学殿堂来欣赏数学更为合适. 笔者曾有幸做过题为《数缺形时少直觉，形少数时难入微》的高三数学教学展示，在教学中对课本的两道经典例题做了深入研究和联想. 为了呼唤更多的教师与学生走出题海，回归课本，下文重新梳理本次教学与读者分享.

一、对课本例题的思想方法研究

上教版高一数学课本(第一学期)有这样一道例题：已知$ad\neq bc$，求证：$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$ (为了研究方便，摘录课本的分析法证明如下).

证明：要证明$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$，就是要证明$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2>a^2c^2++2abcd+b^2d^2$，

由不等式的性质可知，要证明上式，只需证明$a^2d^2-2abcd+b^2c^2>0$，即只需证明$(ad-bc)^2>0$.

因为$ad\neq bc$，所以不等式$(ad-bc)^2>0$成立，且以上各步均可逆，

所以$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$成立.

经过研究，课本提供的分析法比较容易接受，但本题是否还有让人眼前一亮的方法呢？经过尝试，发现本例是一道突出数学思想、丰富数学内涵的典型例题.

(1) 作差比较

证明：$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=a^2d^2+b^2c^2-2abcd=(ad-bc)^2$；

因为$ad\neq bc$，所以$(ad-bc)^2>0$，故$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$.

(2) 作商比较

证明：$\dfrac{|ac+bd|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$

$$\leqslant\frac{|ac|+|bd|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$$

$$=\frac{|ac|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}+\frac{|bd|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{c^2}{c^2+d^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{d^2}{c^2+d^2}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+d^2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{d^2}{c^2+d^2}\right)=1,$$

由$ad\neq bc$，只有当$ad+bc=0$时，$\sqrt{\dfrac{a^2}{a^2+b^2}\cdot\dfrac{c^2}{c^2+d^2}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2+b^2}\cdot\dfrac{d^2}{c^2+d^2}}\leqslant 1$取等号，

而$\dfrac{|ac+bd|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}\leqslant\dfrac{|ac|+|bd|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$等号不能成立，

故$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$.

(3) 借助判别式

证明：因为$ad\neq bc$，所以构造函数$f(x)=(ax-c)^2+(bx-d)^2$，对任意$x\in\mathbf{R}$都有$f(x)>0$恒成立，即$(a^2+b^2)x^2-2(ac+bd)x+c^2+d^2>0$恒成立.

又$a^2+b^2>0$得判别式$\Delta=4(ac+bd)^2-4(a^2+b^2)(c^2+d^2)<0$,

故$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$.

(4) 构造复数的模

证明：设$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ (a、b、c、$d\in\mathbf{R}$且$ad\neq bc$),

于是$|z_1|^2=a^2+b^2$，$|z_2|^2=c^2+d^2$，

而$z_1\cdot\overline{z}_2=(ac+bd)+(bc-ad)i$，$\overline{z}_1\cdot z_2=(ac+bd)-(bc-ad)i$，

由$|z_1|^2\cdot|z_2|^2=z_1\cdot\overline{z}_1\cdot z_2\cdot\overline{z}_2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2>(ac+bd)^2$，

所以$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$.

或者经配方得$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2>(ac+bd)^2$.

(5) 利用行列式

$$
\begin{aligned}
&(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2\\
=&\begin{vmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{vmatrix}\\
=&\begin{vmatrix} a^2+b^2 & ac \\ ac+bd & c^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a^2+b^2 & bd \\ ac+bd & d^2 \end{vmatrix}\\
=&\begin{vmatrix} a^2 & ac \\ ac & c^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b^2 & ac \\ bd & c^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a^2 & bd \\ ac & d^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b^2 & bd \\ bd & d^2 \end{vmatrix}\\
=&\begin{vmatrix} b^2 & ac \\ bd & c^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a^2 & bd \\ ac & d^2 \end{vmatrix}\\
=&(bc-ad)\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}\\
=&(bc-ad)^2>0,
\end{aligned}
$$

故 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$.

一个数学结论既有常规方法, 又有比较独到的方法, 并且与数学很多分支有着密切联系, 那么这个结论肯定具有代表性. 数学课本的例题体现的载体简单, 饱含的方法经典, 反映的思想深刻.

二、对课本例题的数学背景联想

无独有偶, 上教版高一数学课本(第一学期)还有这样一道例题: 已知 a、$b\in\mathbf{R}$, 求证: $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$, 本题正是上述例题当 $c=d$ 时的特例, 两例题没有本质的区别, 都是柯西不等式的二维形式. 笔者发现, 适当对其展开联想, 既可以领悟重要的数学思想方法, 又可以领悟课本编制该例题的用意, 所以本例题是强化基础概念、重现基本公式的极好素材.

显然 $a^2+b^2\geqslant 2ab\Longleftrightarrow 2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$, 结合课本例题, 以三角、向量、几何、代数恒等式、复数、函数等为背景展开如下联想.

(1) 三角比定义

联想到"任意角的三角比定义", 设 $M(a,b)$ 是角 α 的终边上一点, 即 $|OP|=\sqrt{a^2+b^2}$, 于是 $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 将其变形为 $\left|\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=|\cos\alpha+\sin\alpha|\leqslant\sqrt{2}$, 故 $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$.

(2) 三角函数的振幅

由 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ 联想到不等式 $|a\sin x+b\cos x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都成立. 于是当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时不等式

$$\left|a\sin\frac{\pi}{4}+b\cos\frac{\pi}{4}\right|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$$

恒成立, 即 $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}b\right|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$ 成立, 故 $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$.

(3) 复数的模

设 $z_1=a+b\mathrm{i}$, $z_2=b+a\mathrm{i}$ $(a$、$b\in\mathbf{R})$, 即 $z_1+z_2=(a+b)(1+\mathrm{i})$, $|z_1|=|z_2|=\sqrt{a^2+b^2}$.

由 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$ 得 $\sqrt{2}|a+b|\leqslant 2\sqrt{a^2+b^2}\Longrightarrow(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$.

(4) 向量的坐标

设 $\overrightarrow{m}=(a,b)$, $\overrightarrow{n}=(b,a)$, 同理 $|\overrightarrow{m}+\overrightarrow{n}|\leqslant|\overrightarrow{m}|+|\overrightarrow{n}|$ 得 $\sqrt{2}|a+b|\leqslant 2\sqrt{a^2+b^2}$, 即 $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$.

(5) 向量的数量积

设 $\overrightarrow{m}=(a,b)$, $\overrightarrow{n}=(1,1)$, 于是 $|\overrightarrow{m}|=\sqrt{a^2+b^2}$, $|\overrightarrow{n}|=\sqrt{2}$, $\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}=a+b$. 又 $|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|\leqslant|\overrightarrow{m}|\cdot|\overrightarrow{n}|$, 所以 $|a+b|\leqslant\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$, 即 $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$.

(6) 点到直线的距离

观察 $\dfrac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 的结构, 联想点到直线的距离公式, 点 $A(1,1)$ 到直线 $l: ax+by=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant|OA|=\sqrt{2}$ (其中 O 为坐标原点), 得 $\sqrt{2}|a+b|\leqslant 2\sqrt{a^2+b^2}$, 即 $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$.

(7) 等腰三角形的高

设点 $P(a,b)$、$Q(b,a)$, (如图1) 于是 $|OP|=\sqrt{a^2+b^2}$, PO 的中点为 $G\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{a+b}{2}\right)$, 且 $OG=\dfrac{a+b}{2}\cdot\sqrt{2}$. 又 $OG\perp PQ$, 所以 $|OG|\leqslant|OP|$, 即 $\dfrac{|a+b|}{2}\cdot\sqrt{2}\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$, 故 $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$.

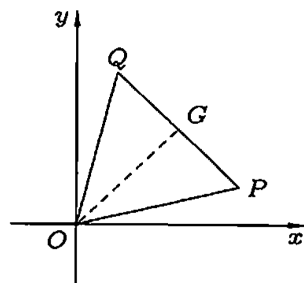


图 1

(8) 方程组有解

设 $a+b=c$, $\sqrt{a^2+b^2}=r$, 即关于 a、b 的

方程组 $\begin{cases} a+b=c \\ \sqrt{a^2+b^2}=r \end{cases}$ 有解, 问题转化为直线与半圆弧有公共点得 $|c| \leqslant \sqrt{2}r$, 即 $|a+b| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$, 故 $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$.

(9) 两边之和大于第三边

如图2, 构造等腰直角 $\triangle ABC$, 其中 $\angle ACB = 90^\circ, |AE| = |BF| = a, |EC| = |FC| = b$, a、$b \in \mathbf{R}^+$, 于是 $|AB| = \sqrt{2}(a+b), |PA| = |PB| = \sqrt{a^2+b^2}$, 由 $|PA| + |PB| \geqslant |AB|$ 得 $2\sqrt{a^2+b^2} \geqslant \sqrt{2}(a+b)$.

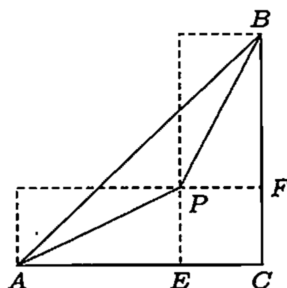


图 2

(10) 梯形的中位线

设梯形 $ABCD$, $AD/\!/BC$, $AD=a, BC=b$, 其中 $0<a<b$, 于是梯形的中位线 EF 的长为 $\frac{a+b}{2}$, 此时梯形 $AEFD$ 的面积显然小于梯形 $BEFC$ 的面积. 如图3, 作 $MN/\!/EF$ 且 MN 使梯形 $AMND$ 的面积等于梯形 $BMNC$ 的面积, 所以 $MN > EF$. 设 $MN = c$, 两梯形 $AMND$ 与 $BMNC$ 的高分别为 h_1、h_2, 于是 $\frac{1}{2}(a+c)h_1 = \frac{1}{2}(b+c)h_2$. 又 $\frac{h_1}{h_2} = \frac{c-a}{b-c}$,

所以 $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 即 $\frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

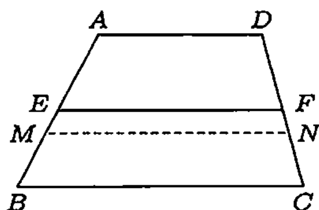


图 3

(11) 一元不等式

若 $b=0$ 时, $|a+b| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$ 显然成立; 若 $b \neq 0$ 时, 设 $\frac{a}{b} = x$, 将二元不等式转化为一元不等式 $\frac{|x+1|}{\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{x^2+1}$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 时恒成立问题(下略).

(12) 函数的凸凹性

设 $f(x) = x^2$, 由函数是凹函数, 于是对任意 a、b 都有 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 成立, 当且仅当 $a = b$ 时取等号. 不等式 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$ 恒成立, 故 $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$.

(13) 平均数与方差

从统计学角度出发, 由于 a、b 的平均数为 $\overline{x} = \frac{a+b}{2}$, 方差 $\frac{(a-\overline{x})^2+(b-\overline{x})^2}{2} \geqslant 0$. 又方差为 $\frac{a^2+b^2}{2} - (\overline{x})^2$, 所以 $2(a^2+b^2) \geqslant (a+b)^2$.

由数思形, 以形示数才是欣赏数学的最高境界, 数学家华罗庚曾经有过描述:"数与形, 本是相倚依, 焉能分作两边飞. 数缺形时少直觉, 形少数时难入微."对课本例题的数学背景加以联想, 其实就是对本例的多种方法介绍. 思维发散中同时感受到数学真乃奇妙无穷, 知识与知识间会有那么多联系, 又有那么多交汇, 因此思维品质是否得到提升只有亲历亲为者自己知晓.

三、对课本例题的文化渊源概述

上教版高一数学课本(第一学期)出现了这样两道练习题:

已知 x、$y \in \mathbf{R}^+$, 求证: $\sqrt{(1+x)(1+y)} \geqslant 1+\sqrt{xy}$;

已知 $a>0, b>0$, 求证: $2(a+b) \geqslant (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

详尽研究不难发现, 以上4道题目没有本质的区别, 都是柯西不等式的特例, 他们的证明方法和合理联想等都类似.

柯西不等式的一般形式: 对任意 $a_k \in \mathbf{R}, b_k \in \mathbf{R}\,(k \in \mathbf{N}^*)$, 总有

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

成立, 其中当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ 时取等号.

柯西不等式有很多推广, 不仅适合于 $a_k \in \mathbf{R}, b_k \in \mathbf{R}$, 而且在复数域中也是成立的(本文从略). 本文对第3题的证明方法、对第4题的联想等, 如常规的方法: 作差(商)比较法、构造向量的数量积、借助方差公式等都适合于柯西不等式的一般形式的证明, 甚至可以采用数学归纳法加以

(下转第6-32页)

一类函数图象对称性的探究

200240 上海市闵行第二中学 毛六明

一、提出问题

先看下列两道函数奇偶性判断题:

(1) $y=\frac{2^x-1}{2^x+1}$; (2) $y=\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}$.

解答很简单, 应用奇偶性定义和指数运算性质即可判断它们都是奇函数.

如果把第(1)题的函数看成指数函数 $f(x)=2^x$ 与分式函数 $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$ 的复合, 即 $y=g(f(x))$, 那么就可以提出许多问题, 如: 指数函数 $f(x)$ 与分式函数 $g(x)$ 的复合得到函数 $y=g(f(x))$ 是否总是奇函数? 另外, 函数的奇偶性本质上是研究函数图像关于特殊点或特殊线的对称性, 那么还可以从研究奇偶性转化为研究一般的对称性, 提出函数 $y=g(f(x))$ 图像是否具有对称性等问题. 本文就此问题开展了一次探索之旅, 形成探索序列, 过程丰富而有趣, 在此和同行分享.

二、探索过程

探索1: 指数函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$, 分式函数的分子是常数, 分母是一次函数, 形如 $g(x)=\frac{m}{x+1}(m\neq0)$, 则函数 $y=g(f(x))$ 是否具有对称性?

分析: 设 $F(x)=g(f(x))=\frac{m}{a^x+1}$, 则 $F(-x)=\frac{m}{a^{-x}+1}$, 整理得 $F(-x)=\frac{ma^x}{1+a^x}$, 所以有 $F(x)+F(-x)=m$, 可知函数 $F(x)$ 关于点 $\left(0,\frac{m}{2}\right)$ 中心对称. 故有:

结论1 函数 $y=\frac{m}{a^x+1}(m\neq0)$ 的图像关于点 $\left(0,\frac{m}{2}\right)$ 中心对称, 同时也就有函数 $y=\frac{m}{a^x+1}-\frac{m}{2}$ 是奇函数.

上述讨论中的分式函数 $g(x)=\frac{m}{x+1}$ 的分母常数项为1, 改变它的值是否还具有对称性呢?

探索2: 函数 $y=\frac{m}{a^x+n}(m\neq0,n\neq0)$ 的图像是否具有对称性?

分析: 有了结论1, 采用转化的思想解答. 设 $F(x)=\frac{m}{a^x+n}$, 化为 $F(x)=\frac{\frac{m}{n}}{\frac{1}{n}a^x+1}$.

当 $n>0$ 时, $F(x)=\frac{\frac{m}{n}}{a^{x-\log_a n}+1}$, 形式上完全和探索1的类似, 只不过相应位置上的参数改变了. 如果设 $f(x)=\frac{\frac{m}{n}}{a^x+1}$, $F(x)$ 的图像可以由 $f(x)$ 的图像通过左(右)平移 $\log_a n$ 个单位得到, 所以 $F(x)$ 的图像仍然具有对称性, 易得 $F(x)$ 的图像关于点 $\left(\log_a n,\frac{m}{2n}\right)$ 对称.

当 $n<0$ 时, 函数 $F(x)$ 的对称性仍可用转化的方法加以研究, 此时

$$F(x)=\frac{\frac{m}{n}}{-a^{x-\log_a(-n)}+1},\ 设\ f(x)=\frac{\frac{m}{n}}{-a^x+1},$$

易证 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(0,\frac{m}{2n}\right)$, 所以 $F(x)$ 的对称中心为 $\left(\log_a(-n),\frac{m}{2n}\right)$.

综合两种情形, 有:

结论2 函数 $y=\frac{m}{a^x+n}(m\neq0,n\neq0)$ 的图像关于点 $\left(\log_a|n|,\frac{m}{2n}\right)$ 对称, 同时也有 $y=\frac{m}{a^{x+\log_a|n|}+n}-\frac{m}{2n}$ 是奇函数.

问题再一次一般化, 也是本文开始谈到的问题:

探索3: 已知指数函数 $f(x)=a^x$ 与分式函数 $g(x)=\frac{bx+c}{px+q}$ (p、q 都不为0), 则函数 $g(f(x))$ 是否具有对称性?

分析: 设$F(x)=g(f(x))$, $g(x)=\frac{bx+c}{px+q}$化为 $g(x)=\frac{\frac{bx}{p}+\frac{c}{p}}{x+\frac{q}{p}}=\frac{\frac{b}{p}\left(x+\frac{q}{p}\right)+\frac{c}{p}-\frac{bq}{p^2}}{x+\frac{q}{p}}$ $=\frac{b}{p}+\frac{\frac{c}{p}-\frac{bq}{p^2}}{x+\frac{q}{p}}$. 若令$m=\frac{c}{p}-\frac{bq}{p^2}$, $n=\frac{q}{p}$, 有$F(x)=\frac{b}{p}+\frac{m}{a^x+n}$, 此函数由$y=\frac{m}{a^x+n}$向上平移$\frac{b}{p}$ $\left(如果\frac{b}{p}<0,则向下平移\right)$个单位得到, 所以$F(x)$的图像保留了对称性, 因此有:

结论3　函数$F(x)=\frac{ba^x+c}{pa^x+q}$的图像关于点$\left(\log_a|n|,\frac{b}{p}+\frac{m}{2n}\right)$对称. 其中$m=\frac{c}{p}-\frac{bq}{p^2}$, $n=\frac{q}{p}$, 或者说关于点$\left(\log_a\left|\frac{q}{p}\right|,\frac{pc+bq}{2pq}\right)$中心对称.

需要说明的是:

(1) 当$\begin{vmatrix}b & c\\ p & q\end{vmatrix}=0$时, 显然$F(x)$的图像退化为直线, 有可能去掉一个非定义域内的点, 此时$m=\frac{c}{p}-\frac{bq}{p^2}=0$, 但本结论也正确;

(2) 此类函数具有中心对称性, 通过平移后可以得到相应的奇函数;

(3) 实际应用中, 可以不必记这个结论, 理解过程, 应用平移来处理也很有效.

为更好地理解笔者的思考, 举例如下:

例　已知函数$f(x)=\frac{1}{4^x+2}$.

(1) 若$x_1+x_2=1$, 求$f(x_1)+f(x_2)$, 并研究函数$f(x)$有怎样的对称性;

(2) 若函数$y=f(x+m)+n$为奇函数, 求m、n的值;

(3) 若$a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$, 求$a_n$.

略解: (1) 由结论2知$f(x)=\frac{1}{4^x+2}$的图像关于点$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$对称, 所以有$x_1+x_2=1$, $f(x_1)+f(x_2)=\frac{1}{2}$.

(2) 因为$f(x)=\frac{1}{4^x+2}$对称中心为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$, $y=f(x+m)+n$和$f(x)$之间可以通过平移得到, 也就是通过平移可以使得函数图像关于原点对称, 则$m=\frac{1}{2}$, $n=-\frac{1}{4}$, 此时$f\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}=\frac{\frac{1}{2}}{4^x+1}-\frac{1}{4}$, 可证它是奇函数(略).

(3) 因为$a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$和$a_n=f(1)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{n-2}{n}\right)+f\left(\frac{n-3}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right)+f(0)$, 两式相加有$2a_n=\frac{1}{2}(n+1)$, 故$a_n=\frac{1}{4}(n+1)$.

三、延伸探索

到此, 指数函数$f(x)=a^x$与分式函数$g(x)=\frac{bx+c}{px+q}$(p、q都不为0)复合得到的函数$g(f(x))$具有中心对称, 如果分式函数$g(x)$的分子分母都是二次或高次的, 还具有这样的对称性吗? 很显然问题难度很高, 甚至严格说明一个具体函数不是对称图形都很困难, 笔者对它的研究也是初步, 得到的一些结论都只是充分条件. 限于篇幅, 下面只介绍结论, 不作证明.

设函数$f(x)=a^x$,

$$g(x)=\frac{p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\cdots+p_1x+p_0}{q_nx^n+q_{n-1}x^{n-1}+\cdots+q_1x+q_0},$$

$F(x)=g(f(x))$, 即

$$F(x)=\frac{p_n(a^x)^n+\cdots+p_1\cdot a^x+p_0}{q_n(a^x)^n+\cdots+q_1\cdot a^x+q_0}.$$

结论4　若对应系数满足$p_{n-i}=p_i, q_{n-i}=q_i$或$p_{n-i}=-p_i, q_{n-i}=-q_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$, 则$F(x)$是偶函数, 图像关于y轴对称.

结论5　若对应系数满足$p_{n-i}=p_i, q_{n-i}=-q_i$或$p_{n-i}=-p_i, q_{n-i}=q_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$, 则$F(x)$是奇函数, 图像关于原点中心对称.

一般的$F(x)$是否有对称性呢? 一个反例: 如$F(x)=\frac{1}{(2^x)^2+2^x+1}$, 可以用反证法证明, 假设图像关于点$(a,b)$中心对称, 则有$F(x)$满足$F(x+a)+F(a-x)=2b$, 可以说明这样的$a$、$b$

(下转第6-48页)

类比猜想, 实验证明, 变式探究

——探讨与圆锥曲线有关的一类三角形面积的最值问题

201600 上海市松江二中 张忠旺

在解析几何的学习中, 我们遇到有关圆的一个最值问题:

已知圆M : $(x-4)^2+y^2=25$, 过点$P(1,3)$作直线交圆M于A、B两点, 求$\triangle ABC$面积的最大值.

本文对这一问题展开进一步的探究.

1. 问题的解答与推广

1.1 问题的解答

通过平移变换, 原问题等价于"已知圆O : $x^2+y^2=25$, 过点$P(-3,3)$作直线交圆O于A、B两点, 求$\triangle OAB$面积的最大值.

解: 如图1, $S_{\triangle OAB}=\dfrac{25}{2}\sin\angle AOB$. 下面只要求$\sin\angle AOB$的最大值即可.

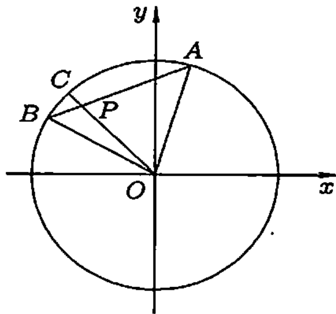


图 1

设OP交圆O于C, 当P为弦AB的中点时, $OP\perp AB$, $\angle AOB$最小.

设$\angle AOB$的最小值为α, $\alpha\leqslant\angle AOB<\pi$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$, $\cos\alpha=\dfrac{11}{25}$, 此时$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, 因为$\dfrac{\pi}{2}\in[\alpha,\pi)$, 所以$\sin\angle AOB\leqslant\sin\dfrac{\pi}{2}=1$, $S_{\triangle OAB}$的最大值为$\dfrac{25}{2}$, 此时$OA\perp OB$.

1.2 问题的一般化

将问题一般化: 设AB是过圆O : $x^2+y^2=a^2$内的定点$P(m,n)$的弦, 求$\triangle OAB$的面积的最大值.

按照上述问题解答的思路我们探究如下.

如图1, $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}a^2\sin\angle AOB$, 下面求$\sin\angle AOB$的最大值.

设OP交圆O于C, 当P为弦AB的中点时, $OP\perp AB$, $\angle AOB$最小. 设$\angle AOB$的最小值为α, $\alpha\leqslant\angle AOB<\pi$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{m^2+n^2}}{a}$.

(1) 当$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$时, $\dfrac{\pi}{2}\in[\alpha,\pi)$, $\sin\angle AOB\leqslant\sin\dfrac{\pi}{2}=1$, $S_{\triangle OAB}$的最大值为$\dfrac{1}{2}a^2$, 此时$OA\perp OB$;

(2) 当$\alpha\geqslant\dfrac{\pi}{2}$时, $\sin\angle AOB$在$[\alpha,\pi)$上单调递减, 所以$\sin\angle AOB\leqslant\sin\alpha$, $S_{\triangle OAB}$的最大值为$\dfrac{1}{2}a^2\sin\alpha=a^2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$

$$=\sqrt{m^2+n^2}\sqrt{a^2-(m^2+n^2)},$$

此时P为弦AB的中点.

于是有

结论1 设AB是过圆O : $x^2+y^2=a^2$内的定点$P(m,n)$的弦, 则

(1) 若$\dfrac{1}{2}a^2<m^2+n^2<a^2$, 当$OA\perp OB$时, $\triangle OAB$的面积取得最大值$\dfrac{1}{2}a^2$;

(2) 若$0<m^2+n^2\leqslant\dfrac{1}{2}a^2$, 当$P$为线段$AB$的中点时, $\triangle OAB$的面积取得最大值

$$\sqrt{(m^2+n^2)[a^2-(m^2+n^2)]}.$$

2. 类比猜想

由圆到椭圆, 类比探究椭圆类似的最值问题: 如图2, 设椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, 椭圆中心为$O$, AB是过椭圆内的定点$P(m,n)$的弦, 求$\triangle OAB$面积的最大值.

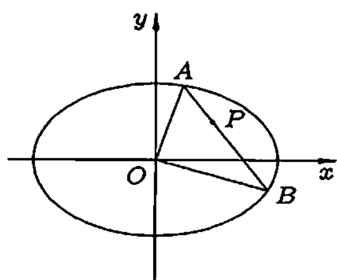


图 2

我们知道，圆可以通过压缩变换变为椭圆，而在压缩变换下，共线点仍变为共线点且点分线段的比是不变的，于是，我们将圆与椭圆的两个问题的结论类比如下：

(1) 当 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos\frac{\alpha}{2}>\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{a^2}}>\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\longrightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}>\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$OA\perp OB\longrightarrow k_{OA}\cdot k_{OB}=-\frac{b^2}{a^2}$，

$S_{\triangle OAB}$ 的最大值 $\frac{1}{2}a^2$

$\longrightarrow S_{\triangle OAB}$ 的最大值 $\frac{1}{2}ab$.

(2) 当 $\alpha\geqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{a^2}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\longrightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$P(m,n)$ 为弦 AB 的中点

$\longrightarrow P(m,n)$ 为弦 AB 的中点，

$\triangle OAB$ 的面积最大值

$$a^2\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{a^2}}\sqrt{1-\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{a^2}\right)}$$

$\longrightarrow \triangle OAB$ 的面积最大值

$$ab\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\sqrt{1-\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}.$$

根据以上类比分析，我们可得如下猜想：

结论2 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，$AB$ 是过椭圆内的定点 $P(m,n)$ 的弦.

(1) 若 $\frac{1}{2}<\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}<1$，当 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-\frac{b^2}{a^2}$ 时，$\triangle OAB$ 的面积取得最大值 $\frac{1}{2}ab$；

(2) 若 $0<\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\leqslant\frac{1}{2}$，当点 P 为线段 AB 的中点时，$\triangle OAB$ 的面积取得最大值

$$ab\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\sqrt{1-\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}.$$

3. 实验证明

对于猜想所得结论中的两种不同情形，我们用《几何画板》进行实验验证. 如图3，当直线 AB 绕点 P 转动时，我们以直线 AB 的斜率为横坐标，三角形 OAB 的面积为纵坐标作出面积关于斜率的函数图像，可以看出函数有最大值，并且图形满足面积取得最大值时的条件.

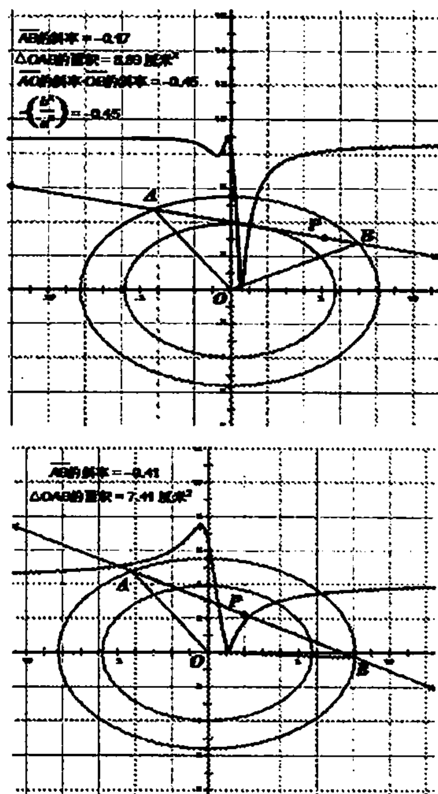


图 3

下面给出结论2的证明.

证明：(1) 当直线 AB 与 x 轴不垂直时，设直线 AB 的方程为 $y=k(x-m)+n$，代入椭圆方程整理得 $(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2k(n-km)x+a^2(n-km)^2-a^2b^2=0$，

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，

$\therefore\ x_1+x_2=-\frac{2a^2k(n-km)}{b^2+a^2k^2}$，

$x_1\cdot x_2=\frac{a^2(n-km)^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$.

$|AB|=\frac{2ab\sqrt{1+k^2}\sqrt{(b^2+a^2k^2)-(n-km)^2}}{b^2+a^2k^2}$，

原点O到直线AB的距离为$d=\dfrac{|n-km|}{\sqrt{1+k^2}}$.

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|AB|d$$
$$=\frac{ab|n-km|\sqrt{(b^2+a^2k^2)-(n-km)^2}}{b^2+a^2k^2}$$

令$f(k)=\dfrac{|n-km|\sqrt{(b^2+a^2k^2)-(n-km)^2}}{b^2+a^2k^2}$,

则$f^2(k)=\dfrac{(n-km)^2[(b^2+a^2k^2)-(n-km)^2]}{(b^2+a^2k^2)^2}$. 下面只要求$f^2(k)$的最大值就可以了.

设$t=\dfrac{(n-km)^2}{b^2+a^2k^2}$, 由$k\in\mathbf{R}$, 利用$k$的判别式可求得$0<t\leqslant\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}$,

$$f^2(k)=t-t^2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}.$$

(i)当$0<\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$时, 取$t=\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}$,

$$f^2(k)_{\max}=\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\left[1-\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right],$$

$S_{\triangle OAB}$的最大值为

$$ab\sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\left[1-\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]}.$$

此时由$t=\dfrac{(n-km)^2}{b^2+a^2k^2}=\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}$可得$\dfrac{n}{m}\cdot k=-\dfrac{b^2}{a^2}$, 即$k_{OP}\cdot k_{AB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$, 故$P$为线段$AB$的中点.

(ii)当$\dfrac{1}{2}<\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}<1$时, $t=\dfrac{1}{2}$时, $f^2(k)_{\max}=\dfrac{1}{4}$, $S_{\triangle OAB}$的最大值为$\dfrac{1}{2}ab$. 此时由$t=\dfrac{(n-km)^2}{b^2+a^2k^2}=\dfrac{1}{2}$可得$k_{OA}\cdot k_{OB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$.

(2)当直线AB与x轴垂直时, 其斜率k不存在, AB的方程为$x=m$,

$|AB|=\dfrac{2b\sqrt{a^2-m^2}}{a}$, 原点$O$到直线$AB$的距离为$|m|$, $S_{\triangle OAB}=\dfrac{b|m|\sqrt{a^2-m^2}}{a}$.

(i)当$0<\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$时, 函数$t(1-t)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$上是增函数.

$$\because\ 0<\frac{m^2}{a^2}\leqslant\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\leqslant\frac{1}{2},$$

$$\therefore\ \frac{b|m|\sqrt{a^2-m^2}}{a}=ab\sqrt{\frac{m^2}{a^2}\left(1-\frac{m^2}{a^2}\right)}$$
$$\leqslant ab\sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\left[1-\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]}.$$

(ii)当$\dfrac{1}{2}<\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}<1$时, $\dfrac{b|m|\sqrt{a^2-m^2}}{a}$

$$=ab\sqrt{\frac{m^2}{a^2}\left(1-\frac{m^2}{a^2}\right)}\leqslant\frac{1}{2}ab.$$

综合(1)、(2), 结论得证.

特别地, 在结论2中, 当点P为椭圆的一个焦点时, 我们有如下推论.

推论: 设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, AB为椭圆的焦点弦, 则

$$(S_{\triangle OAB})_{\max}=\begin{cases}\dfrac{b^2c}{a}, & 0<e<\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \dfrac{1}{2}ab, & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant e<1.\end{cases}$$

4. 变式探究

4.1 结论2的变式

如果点P在x轴上, 三角形顶点O变换为x轴上的一点C, 则有

结论3 设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, 点$C(t,0)$是$x$轴上一点, AB是过椭圆内的定点$P(m,0)\,(m\neq t)$的弦, AB的斜率为k, 则

(1)若$\dfrac{|m|}{a}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 当$AB\perp x$轴时, $\triangle CAB$的面积取得最大值$\dfrac{b}{a}|m-t|\sqrt{a^2-m^2}$;

(2)若$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\dfrac{|m|}{a}<1$, 当$|k|=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{b}{a}}{\sqrt{\left(\dfrac{m}{a}\right)^2-\dfrac{1}{2}}}$时, $\triangle CAB$的面积取得最大值$\dfrac{1}{2}\dfrac{|m-t|}{|m|}ab$.

结论3的证明比较容易, 限于篇幅不再赘述.

4.2 对于双曲线和抛物线的有关结论

结论4 如图4, 设双曲线的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$

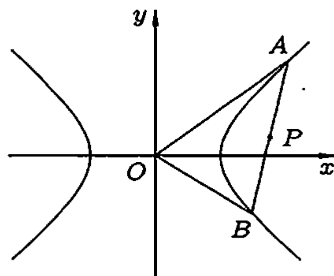


图 4

$=1\,(a>0,b>0)$, O为双曲线的中心, 直线l过双曲线右支内的定点$P(m,n)$且与右支相交于A、B, 则当P为线段AB的中点时, $\triangle OAB$面积取得最小值为$ab\sqrt{\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}}\sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}\right)-1}$.

证明: 由于P在双曲线内, 故$\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}>1$.

(1) 当直线AB与x轴不垂直时, 设直线AB的方程为$y=k(x-m)+n$. 仿结论2的证明可得,

$$S_{\triangle OAB}=\frac{ab|n-km|\sqrt{(n-km)^2-(a^2k^2-b^2)}}{a^2k^2-b^2},$$

$k\in\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right)\cup\left(\frac{b}{a},+\infty\right)$.

令 $f(k)=\frac{|n-km|\sqrt{(n-km)^2-(a^2k^2-b^2)}}{a^2k^2-b^2}$,

则$f^2(k)=\frac{(n-km)^2[(n-km)^2-(a^2k^2-b^2)]}{(a^2k^2-b^2)^2}$.

设$t=\frac{(n-km)^2}{a^2k^2-b^2}$, $f^2(k)=t^2-t$在$\left[\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2},+\infty\right)$上单调递增, 所以$t=\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}$时, $f^2(k)_{\min}=\left(\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}\right)\left[\left(\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}\right)-1\right]$,

$S_{\triangle OAB}$的最小值为

$ab\sqrt{\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}}\sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}\right)-1}$, 此时由$t=\frac{(n-km)^2}{a^2k^2-b^2}=\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}$, 可得$k\cdot\frac{n}{m}=\frac{b^2}{a^2}$, 即$k_{OP}\cdot k_{AB}=\frac{b^2}{a^2}$, 故$P$为线段$AB$的中点.

(2) 当直线AB与x轴垂直时, 其斜率k不存在, AB的方程为$x=m$.

$$S_{\triangle OAB}=\frac{b|m|\sqrt{m^2-a^2}}{a},$$

$\because 1<\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}\leqslant\frac{m^2}{a^2}$,

$f^2(k)=t^2-t$在$(1,+\infty)$上为增函数,

$$\therefore S_{\triangle OAB}=\frac{b|m|\sqrt{m^2-a^2}}{a}$$

$$=ab\sqrt{\frac{m^2}{a^2}\left(\frac{m^2}{a^2}-1\right)}$$

$$\geqslant ab\sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}\right)\left[\left(\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}\right)-1\right]}.$$

综合(1)、(2)可知结论成立.

结论5 设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$, 点$C(t,0)$是$x$轴上一点, 直线$l$过双曲线右支内的定点$P(m,0)\,(m\neq t)$且与右支相交于$A$、$B$, 则当$l\perp x$轴时, $\triangle CAB$的面积取得最小值$\frac{b}{a}|m-t|\sqrt{m^2-a^2}$.

一般地, 对于抛物线$y^2=2px\,(p>0)$, 过其内定点$P(m,n)$的弦AB与顶点O围成的三角形OAB的面积没有最大值和最小值. 但当定点在抛物线轴上时, 我们有

结论6 设抛物线的方程为$y^2=2px\,(p>0)$, 点$C(t,0)$是x轴上一点, AB是过抛物线轴上的定点$P(m,0)\,(m\neq t)$的弦, 则当$l\perp x$轴时, $\triangle CAB$的面积取得最小值$|m-t|\sqrt{2pm}$.

读者可自行证明结论5和结论6.

4.3 结论的应用

以上结论的变式在高考试题中屡有出现. 例如2006年高考江西卷第21题: 如图5, 椭圆Q: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的右焦点$F(c,0)$, 过点$F$的一动直线$m$绕点$F$转动, 并且交椭圆于$A$、$B$两点, P是线段AB的中点.

(1) 求点P的轨迹H的方程;

(2) 在Q的方程中, 令$a^2=1+\cos\theta+\sin\theta$, $b^2=\sin\theta\left(0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, 确定$\theta$的值, 使原点距椭圆的右准线$l$最远, 此时, 设$l$与$x$轴交点为$D$, 当直线$m$绕点$F$转动到什么位置时, 三角形$ABD$的面积最大?

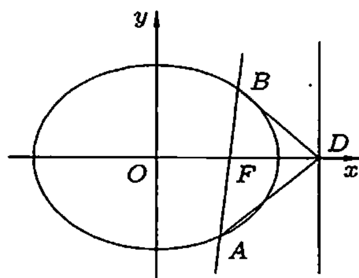


图 5

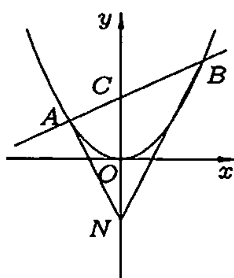


图 6

本题的第(2)小题是结论3的特例.

2007年高考湖北卷第19题: 如图6, 在平面直角坐标系xOy中, 过定点$C(0,p)(p>0)$作直线与抛物线$x^2=2py$相交于两点A、B.

(I) 若点N是点C关于坐标原点O的对称点, 求$\triangle ANB$面积的最小值;

(II) 是否存在垂直于y轴的直线l, 使得l被以AC为直径的圆截得的弦长恒为定值? 若存在, 求出l的方程; 若不存在, 说明理由.

本题的第(I)小题是结论6的特例.

用一种代换方法证明两类条件不等式

256200 山东省邹平县教育局教研室 姜坤崇

在代数不等式的证明中, 我们经常会遇到三个正数的和或积为1的条件不等式, 这类不等式的证明使用的数学工具和方法灵活多样, 没有固定、统一的方法. 本文介绍一种代换方法, 可作为处理这两类条件不等式的一种方法.

这里要介绍的代换, 即将不等式中的三元a、b、c分别设为$a=y^\alpha z^\alpha, b=z^\alpha x^\alpha, c=x^\alpha y^\alpha$, 其中$a$、$b$、$c$、$x$、$y$、$z\in\mathbf{R}^+$, $\alpha\in\mathbf{R}$, 且$\alpha\neq 0$, 则当条件式为$a+b+c=1$时有 $x^\alpha y^\alpha+y^\alpha z^\alpha+z^\alpha x^\alpha=1$; 当条件式为$abc=1$时, 有$(xyz)^{2\alpha}=1$, 从而$xyz=1$.

1. 用于证明条件式为$a+b+c=1$或$a+b+c=abc$的不等式

例1 (1988年苏联数学奥林匹克试题) 设x、y、z都是正数, 且$x^2+y^2+z^2=1$, 求$S=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$的最小值.

解: 设$x=\sqrt{bc}, y=\sqrt{ca}, z=\sqrt{ab}$ (a、b、$c>0$), 则问题变为: 已知$ab+bc+ca=1$, 求$S=a+b+c$的最小值.

因为$S^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\geqslant 3(ab+bc+ca)=3$,

所以当$x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$时, S取得最小值$\sqrt{3}$.

例2 (文[1]问题1) 设x、y、z为正实数, 且$x+y+z=1$,求证:

$$\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}+\frac{z}{z+xy}\leqslant\frac{9}{4}.$$

原文提供的证明较繁, 下面利用本文介绍的代换法给出一种简证.

证明: 设$x=bc, y=ca, z=ab$ (a、b、$c>0$), 则$xy=abc^2, yz=bca^2, zx=cab^2$, 问题转化为: 已知$ab+bc+ca=1$, 证明$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\leqslant\frac{9}{4}\Longleftrightarrow\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\geqslant\frac{3}{4}$.

因为$a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(c+a)$, 同理$b^2+1=(b+c)(a+b), c^2+1=(c+a)(b+c)$, 于是以上不等式等价于

$$\frac{a^2}{(a+b)(c+a)}+\frac{b^2}{(b+c)(a+b)}+\frac{c^2}{(c+a)(b+c)}\geqslant\frac{3}{4}\quad①$$

$\Longleftrightarrow a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b-6abc\geqslant 0$

$\Longleftrightarrow a(b-c)^2+b(a-c)^2+c(a-b)^2\geqslant 0.$

由于最后一个不等式显然成立, 故得原不等式成立.

说明: 不等式 ① 即为2004年克罗地亚数学奥林匹克试题:

证明: 不等式$\frac{a^2}{(a+b)(c+a)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geqslant\frac{3}{4}$对所有正实数$a$、$b$、$c$成立.

例3 (2008年加拿大数学竞赛试题) 已知a、b、c三个正数满足$a+b+c=1$, 求证:

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\leqslant\frac{3}{2}.$$

证法1: 设$a=yz, b=zx, c=xy$ (x、y、$z>0$), 则问题转化为: 已知$xy+yz+zx=1$, 求证:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}\leqslant\frac{3}{2}.$$

而以上不等式等价于

$$\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}\geqslant\frac{3}{4}$$

$$\Longleftrightarrow\frac{x^2}{(x+y)(z+x)}+\frac{y^2}{(y+z)(x+y)}+\frac{z^2}{(z+x)(y+z)}\geqslant\frac{3}{4},$$

此即为不等式 ①, 下证略.

证法2: $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\leqslant\frac{3}{2}$

$$\Longleftrightarrow \frac{bc}{a+bc}+\frac{ca}{b+ca}+\frac{ab}{c+ab}\geqslant\frac{3}{4}.$$

因为$a+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(c+a)$等，故以上不等式等价于 $\frac{bc}{(a+b)(c+a)}+\frac{ca}{(b+c)(a+b)}+\frac{ab}{(c+a)(b+c)}\geqslant\frac{3}{4}$. ……… ②

令$a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}(x,y,z>0)$，则②式可化为 $\frac{x^2}{(x+y)(z+x)}+\frac{y^2}{(y+z)(x+y)}+\frac{z^2}{(z+x)(y+z)}\geqslant\frac{3}{4}$，即为不等式①，下证略.

证法3: $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\leqslant\frac{3}{2}$

$$\Longleftrightarrow \frac{2a}{a+bc}+\frac{2b}{b+ca}+\frac{2c}{c+ab}\leqslant\frac{9}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{c}{c+ab}\leqslant\frac{9}{4},$$

这正是例2，即知所证不等式成立.

说明：以上证法2中的不等式②即为第30届IMO预选题：

设a、b、c是正实数，求证：$\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}\geqslant\frac{3}{4}$.

例4 (2005年法国国家队试题)：设x、y、z是正实数，且$x+y+z=1$，求证：

$$\sqrt{\frac{xy}{z+xy}}+\sqrt{\frac{yz}{x+yz}}+\sqrt{\frac{zx}{y+zx}}\leqslant\frac{3}{2}.$$

证明：设$x=bc,y=ca,z=ab$ (a、b、$c>0$)，则$xy=abc^2,yz=bca^2,xz=cab^2$，问题转化为：已知$ab+bc+ca=1$，求证：

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\leqslant\frac{3}{2}.$$

以上有条件约束的不等式等价于无条件约束的不等式：$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\leqslant\frac{3}{2}$. ……… ③

因为$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}=\sqrt{\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{c+a}}$

$$+\sqrt{\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{b+c}\cdot\frac{c}{c+a}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}\right)=\frac{3}{2}.$$

所以原不等式获证.

说明：(1)以上证明中的不等式③即为2001年德国国家队试题：

设a、b、c是正数，求证：$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(c+a)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\leqslant\frac{3}{2}$.

亦为《数学通报》2004年第9期数学问题1513(由笔者提供)：a、b、$c>0$，求证：

$$a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

(2)例4也可不作代换而直接证明(参见例5证法1)，这里作代换的证明，是为了揭示本例与以上问题(2001年德国国家队试题)的内在联系.

例5 (1998年韩国数学奥林匹克试题)设正数x、y、z满足$x+y+z=xyz$，证明：

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\leqslant\frac{3}{2}.$$

证法1：设$x=\frac{1}{bc},y=\frac{1}{ca},z=\frac{1}{ab}$ (a、b、$c>0$)，则$abc(a+b+c)=1$，于是

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{b^2c^2}{b^2c^2+1}}+\sqrt{\frac{c^2a^2}{c^2a^2+1}}+\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2b^2+1}}$$

$$=\sqrt{\frac{b^2c^2}{b^2c^2+abc(a+b+c)}}+\sqrt{\frac{c^2a^2}{c^2a^2+abc(a+b+c)}}+\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2b^2+abc(a+b+c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{bc}{bc+a(a+b+c)}}+\sqrt{\frac{ca}{ca+b(a+b+c)}}+\sqrt{\frac{ab}{ab+c(a+b+c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(c+a)}}+\sqrt{\frac{ca}{(b+c)(a+b)}}+\sqrt{\frac{ab}{(c+a)(b+c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{b}{a+b}\cdot\frac{c}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{b+c}\cdot\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{a}{c+a}\cdot\frac{b}{b+c}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+a}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+b}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{b+c}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}\right)=\frac{3}{2}.$$

故原不等式得证.

证法2: 设$a=\frac{1}{yz},b=\frac{1}{zx},c=\frac{1}{xy}$ (a、b、$c>0$), 则 $x=\sqrt{\frac{a}{bc}},y=\sqrt{\frac{b}{ca}},z=\sqrt{\frac{c}{ab}},a+b+c=1$, 于是

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}+\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}.$$

问题转化为例4, 下证略.

2. 用于证明条件式为$abc=1$的不等式

例6 (1995年IMO试题)设a、b、$c>0$, $abc=1$, 求证: $\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$.

证明: 设$a=yz,b=zx,c=xy$ (x、y、$z>0$), 则$(xyz)^2=abc=1$, 即$xyz=1$, 于是应用柯西不等式的变式$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\frac{a_3^2}{b_3}\geqslant\frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{b_1+b_2+b_3}$ (a_i、$b_i>0,i=1$、2、3) (以下同)及不等式 $(x+y+z)^2\geqslant3(xy+yz+zx)$可得

$$\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}$$
$$=\frac{(xyz)^2}{y^2z^2(zx+xy)}+\frac{(xyz)^2}{z^2x^2(xy+yz)}+\frac{(xyz)^2}{x^2y^2(yz+zx)}$$
$$=\frac{x^2}{xy+zx}+\frac{y^2}{yz+xy}+\frac{z^2}{zx+yz}$$
$$\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

说明: 本例也可作代换$a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}$ (x、y、$z>0$)来证明, 两种代换实质是一样的.

例7 (2004年德国IMO代表队选拔考试试题)设a、b、$c>0,abc=1$, 求证:

$$\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b}+\frac{1}{1+2c}\geqslant1.$$

证明: 设$a=y^2z^2,b=z^2x^2,c=x^2y^2$ (x、y、$z>0$), 则$(xyz)^4=abc=1$, 即$xyz=1$, 于是应用柯西不等式的变式及均值不等式可得

$$\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b}+\frac{1}{1+2c}$$
$$=\frac{1}{1+2y^2z^2}+\frac{1}{1+2z^2x^2}+\frac{1}{1+2x^2y^2}$$
$$=\frac{x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2+2y^2z^2}+\frac{x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2+2z^2x^2}+\frac{x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2+2x^2y^2}$$
$$=\frac{x^2}{x^2+2}+\frac{y^2}{y^2+2}+\frac{z^2}{z^2+2}$$
$$\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+6}$$
$$=\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+6\sqrt[3]{(xyz)^2}}$$
$$\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2(xy+yx+zx)}=1.$$

说明: 本例也可作代换$a=\frac{1}{x^2},b=\frac{1}{y^2},c=\frac{1}{z^2}$ (x、y、$z>0$)或$a=x^2,b=y^2,c=z^2$ (x、y、$z>0$)或$a=\frac{yz}{x^2},b=\frac{zx}{y^2},c=\frac{xy}{z^2}$ (x、y、$z>0$)等来证明, 几种代换的实质是一样的.

例8 (2000年澳门数学竞赛试题)已知a、b、$c\in\mathbf{R}^+$, 且$abc=1$, 求证:

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\leqslant1.$$

证明: 设$a=y^3z^3,b=z^3x^3,c=x^3y^3$ (x、y、$z>0$)则$(xyz)^6=abc=1$, 即$xyz=1$, 于是由均值不等式可得

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}$$
$$=\frac{x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2+y^3z^3+z^3x^3}+\frac{x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2+z^3x^3+x^3y^3}+\frac{x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2+x^3y^3+y^3z^3}$$
$$=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x^3+y^3)z}+\frac{y^2z^2}{y^2z^2+(y^3+z^3)x}+\frac{z^2x^2}{z^2x^2+(z^3+x^3)y}$$
$$\leqslant\frac{x^2y^2}{x^2y^2+xyz(x+y)}+\frac{y^2z^2}{y^2z^2+xyz(y+z)}+\frac{z^2x^2}{z^2x^2+xyz(z+x)}$$
$$=\frac{xy}{xy+yz+zx}+\frac{yz}{xy+yz+zx}+\frac{zx}{xy+yz+zx}$$
$$=1.$$

说明: 本例也可作代换$a=\frac{1}{x^3},b=\frac{1}{y^3},c=\frac{1}{z^3}$ (x、y、$z>0$)或$a=x^3,b=y^3,c=z^3$ (x、y、$z>0$)或$a=\frac{yz}{x^2},b=\frac{zx}{y^2},c=\frac{xy}{z^2}$ (x、y、$z>0$)等来证明, 几种代换的实质是一样的.

参考文献

(下转第6–29页)

数形结合的再思考
——例说平面几何在解析几何中的应用

213022 江苏省常州市北郊中学 程守山

《普通高中数学课程标准》指出，在平面解析几何教学时，首先将几何问题代数化，用代数的语言描述几何要素及其关系，进而将几何问题转化为代数问题；处理代数问题时，要分析代数问题的几何意义，最终代数问题几何化．解析几何问题是高考的热点之一，它是用代数的方法来解决几何问题，体现了“数形结合”的数学思想方法．不少同学在做解析几何题目时感觉这类题目思路比较明确，但计算量比较大，因此解题过程中往往半途而废，有时也会“小题大做”，花费很多时间．这就引发我们对“数形结合”的思考，数与形的互相转化，不单单是单向的，而应该是双向的，需要“数”与“形”的互助互利，实现两者的有机结合，那样才真正有助于完美解决数学问题．

我们看到，有不少问题，若借助于平面几何知识，从平面几何的角度去审视解析几何的问题，将隐含在解析几何问题中的平面几何背景挖掘出来，往往会起到意想不到的效果．

下面通过几道例题谈谈笔者的体会．

一、在线段和差的最值问题中的应用

例1　如图1，在平面直角坐标系xOy中，平行于x轴且过点$A(3\sqrt{3},2)$的入射光线l_1被直线$l:y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$反射．反射光线l_2交y轴于点B，圆C过点A且与l_1，l_2都相切．

(1) 求l_2所在直线的方程和圆C的方程；

(2) 设P、Q分别是直线l和圆C上的动点，求$PB+PQ$的最小值及此时点P的坐标．

(1) 略解：$l_2:\sqrt{3}x-y-4=0$；圆C的方程为$(x-3\sqrt{3})^2+(y+1)^2=9$．

(2) 解：设点$B(0,-4)$关于l的对称点$B'(x_0,y_0)$，则$\frac{y_0-4}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{x_0}{2}$，且$\frac{y_0+4}{x_0}=-\sqrt{3}$，得$B'(-2\sqrt{3},2)$．固定点$Q$可发现，当$B'$、$P$、$Q$三点共线时，$PB+PQ$的值最小，而当$B'$、$P$、$Q$、$C$四点共线时，$PB+PQ$与圆半径3的和最小．故$PB+PQ$的最小值为$B'C-3$．

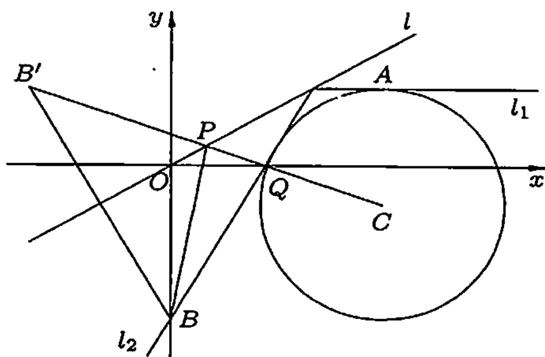


图1

由$\begin{cases}\frac{y+1}{2+1}=\frac{x-3\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}-3\sqrt{3}},\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x,\end{cases}$

得点P坐标为$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，最小值为$B'C-3=2\sqrt{21}-3$．

评注：可以看到，解答第(2)小题的关键是把$PB+PQ$的最小值问题转化为先求$PB+PC$的最小值问题，而后者即是求直线上一动点到两个定点的距离和的问题，这是平面几何中学生早就处理过的数学问题，利用轴对称即可顺利解决．

该问题在课本上也可以找到它的原型，即苏教版必修2第97页第18题：

如图2，已知$M(-1,3)$、$N(6,2)$，点P在x轴上，且使$PM+PN$取最小值，求点P的坐标．

这样，“数”与“形”互助互利，即可顺利解决这一问题．

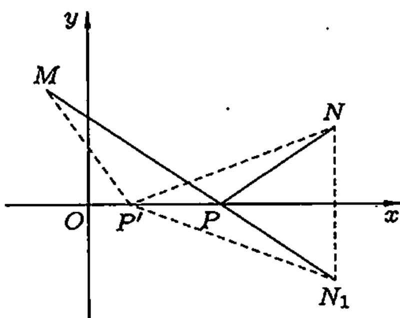


图 2

例2　如图3, 椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$内有两点$A(2,2)$、$B(3,0)$, P为椭圆上一点, 则$PA+PB$的最大值为______. (答案: $10+\sqrt{29}$)

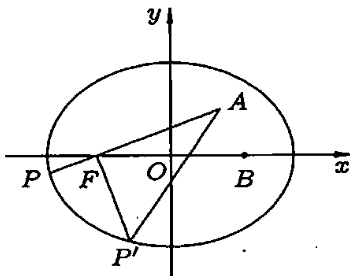


图 3

评注: 解答这道题的关键是发现点B是椭圆的右焦点, 根据椭圆定义有$PB+PF=2a$(F为椭圆的左焦点), 把$PA+PB$转化为$PA+2a-PF=10+PA-PF$, 设点P'为椭圆上任意一点, 即当P、F、A三点共线时$P'A-P'F\leqslant PA-PF=FA$, 因此$PA+PB$取到最大值$10+\sqrt{29}$.

这个问题在课本上也能找到它的原型, 苏教版必修2第117页第20题:

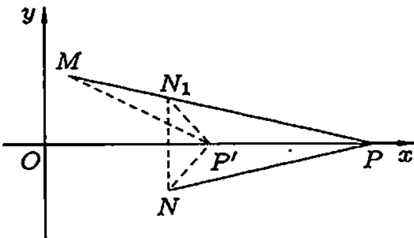


图 4

如图4, 已知$M(1,3)$、$N(5,-2)$, 在x轴上取一点P, 使得$|PM-PN|$最大, 求点P的坐标.

因此与上例一样, 利用平面几何中熟悉的方法, 即可得到该问题的解答.

对教材中出现的例题或习题进行适当的改造、重组形成考题是江苏省高考试题的一个特点. 在课堂中经常对课本中的例、习题进行变式训练, 可引导学生多方位、多角度思考问题, 深入理解概念和本质, 提高学生的逻辑思维和应用能力.

二、在圆锥曲线焦半径、离心率问题中的应用

例3　过抛物线$y^2=4x$的焦点F作弦AB, 若弦AB所在的直线的倾斜角为60°, 则$\frac{AF}{BF}$的值为______.

解: 如图5, 设$AF=m$, $BF=n$, 则$AF:BF=m:n$, 根据抛物线的定义, 在$\text{Rt}\triangle ACB$中, $BC=m-n$, $AB=m+n$, 所以$\cos 60°=\frac{BC}{AB}=\frac{m-n}{m+n}$, 则$\frac{m}{n}=3$.

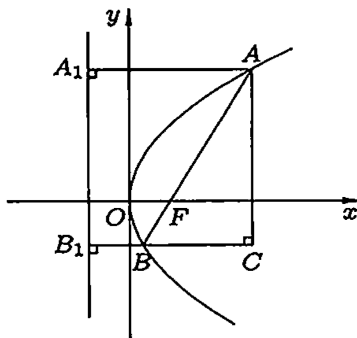


图 5

例4　过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$的右焦点$F$作倾斜角为60°的直线交双曲线于$A$、$B$两点, 若$\overrightarrow{AF}=5\overrightarrow{FB}$, 则该双曲线的离心率为______.

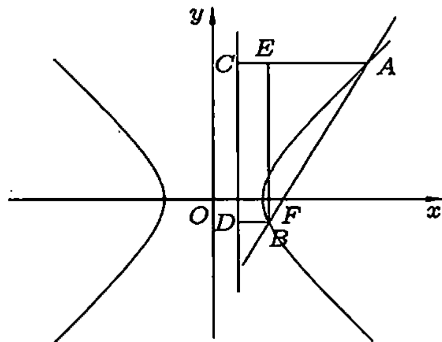


图 6

解: 如图6, 过点A、B作双曲线右准线的垂线, 垂足分别为C、D, 过点B作直线AC的垂线, 垂足为E点. 设$BF=t$, 则$AF=5t$, 根据双曲线的定义, $AC=\frac{5t}{e}$, $BD=\frac{t}{e}$, 所以$AE=\frac{4t}{e}$,

在Rt$\triangle AEB$中, $\cos\angle EAF=\frac{AE}{AB}=\frac{\frac{4t}{e}}{6t}=\frac{2}{3e}=\frac{1}{2}$, 所以$e=\frac{4}{3}$.

例5 设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, PQ是过左焦点F且与x轴不垂直的弦. 若在左准线l上存在点R, 使$\triangle PQR$为正三角形, 则椭圆离心率e的取值范围是________.

解: 如图7, 设弦PQ的中点为M, 分别过点P、M、Q作准线l的垂线, 垂足分别是P_1、M_1、Q_1, 则$MM_1=\frac{1}{2}(PP_1+QQ_1)=\frac{1}{2e}(PF+QF)=\frac{1}{2e}PQ$. 假设存在点$R$, 使$\triangle PQR$为正三角形, 则由$RM=\frac{\sqrt{3}}{2}PQ$, 且$MM_1<RM$, 即得$\frac{1}{2e}PQ<\frac{\sqrt{3}}{2}PQ$, 所以$\frac{\sqrt{3}}{3}<e<1$.

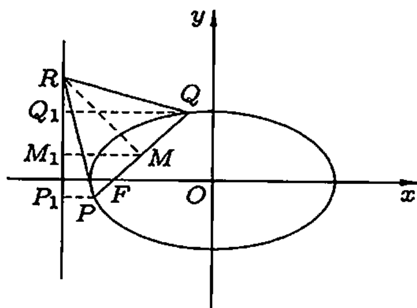


图7

评注: 这里所举的3个例子, 无论是利用锐角三角函数, 还是利用中位线的结论, 同样都是充分利用解析几何的问题中所隐含的平面几何背景, 把复杂问题简单化, 活用数形结合的思想.

三、在轨迹问题中的应用

例6 如图8, 已知椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(0<b<4)$的两个焦点分别为$F_1$、$F_2$, 点$P$为椭圆上的动点, 当点$P$不在$x$轴上时, 过点$F_1$作$\angle F_1PF_2$的外角平分线的垂线$F_1M$, 垂足为$M$. 当点$P$在$x$轴上时, 定义$M$与$P$重合, 则点$M$的轨迹方程为________.

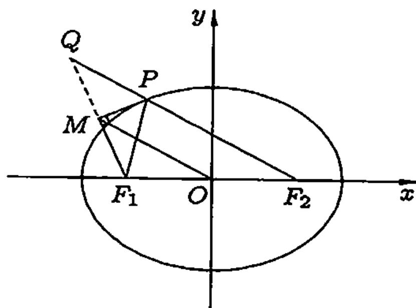


图8

解: 延长F_1M交F_2P于点Q, 根据外角平分线性质, $PF_1=PQ$且M为F_1Q的中点, 所以$F_2Q=PQ+PF_2=PF_1+PF_2=8$.

在$\triangle F_1F_2Q$中, M、O分别为F_1Q、F_1F_2中点, 所以$MO=\frac{1}{2}F_2Q=4$, 则点M的轨迹方程为$x^2+y^2=16$.

评注: 动点的轨迹问题也是平面解析几何中的一个热点问题, 寻找轨迹方程的方法有很多, 例如直接法、代入法、参数法、交轨法等. 对此类问题如果运用平面几何性质, 则会减少很多不必要的麻烦, 减少很多计算量, 解题过程直观易懂.

由以上所列举的一些例子, 我们可以看出对于解析几何中的某些问题, 我们不一定都采用设坐标、解方程等一般方法进行求解, 实际上运用平面几何的观点审视问题, 分析题目中几何量之间的关系, 认清题目中条件和问题的本质特征, 挖掘其中所隐含的平面几何背景, 灵活转化, 实现"数"与"形"完美结合与互助互利, 解决数学问题时可达到柳暗花明、茅塞顿开的境界.

(上接第6-26页)

[1] 安振平, 马俊青. 一组新颖优美的三元代数不等式[J]. 中学数学杂志, 2010(1): 28-30.

[2] 安振平. 三个正数乘积为1的一种代换方法及其应用[J]. 数学通讯, 2010(8下半月): 32-33.

[3] 安振平, 崔岐恩. 由三角形不等式生成代数不等式的一种方法[J]. 数学通报, 2010(8): 48-50.

[4] 卫福山. 几个重要的三角代换在不等式证明中的应用[J]. 中学教研(数学), 2011(5): 15-17.

定值？变量？一类含参问题错误解法的反思

443000 湖北省夷陵中学高三数学组 吴俊峰

1. 问题的提出

笔者在一次阅卷过程中遇到了学生对一道问题的"简便"解法. 题目是这样的:

已知二次函数 $g(x)$ 对任意实数都满足 $g(x-1)+g(1-x)=x^2-2x-1$, 且 $g(1)=-1$.

(1) 求 $g(x)$ 的表达式;

(2) 设 $1<m\leqslant \mathrm{e}, H(x)=g\left(x+\frac{1}{2}\right)+m\ln x-(m+1)x+\frac{9}{8}$, 求证: $H(x)$ 在 $[1,m]$ 上为减函数;

(3) 在 (2) 的条件下, 证明: 对任意 x_1、$x_2\in[1,m]$, 恒有 $|H(x_1)-H(x_2)|<1$.

这里主要是在第 (3) 小题的解法上存在争议, 学生思路如下:

(3) 求得 $H(x)=\frac{1}{2}x^2+m\ln x-(m+1)x$, 利用第 (2) 小题的结论 $H(x)$ 在 $[1,m]$ 上为减函数, 则

$$|H(x_1)-H(x_2)|<H(x)_{\max}-H(x)_{\min}=H(1)-H(m).$$

下面考虑 $H(m)$ 这个函数. 对于 $H(m), m\in(1,\mathrm{e}]$.

$\because$ $H(x)$ 在 $[1,m]$ 上为减函数,

$\therefore$ $H(m)$ 在其定义域 $(1,\mathrm{e}]$ 单调递减,

$$\therefore |H(x_1)-H(x_2)|<H(1)-H(m)<H(1)-H(\mathrm{e})=\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-\frac{1}{2}<1.$$

初看其解法, 不得不赞赏其思维之敏锐, 肯定其不断利用前面问题的结论处理后面问题的思想. 但是冷静下来, 笔者对这种解法是否严谨产生了质疑. 作为参数 m, 我们通常意义下是取定的区间 $(1,\mathrm{e}]$ 的一个定值, 在上面的解法中考虑 $H(m)$ 时能否将 m 看成一个变量, 这种解法是否可取?

2. 解法的反思

在 (2) 中 m 虽然是 $(1,\mathrm{e}]$ 中的一个常数, 但事实上 m 取值确实是可以任意取到 $(1,\mathrm{e}]$ 中的每一个数, 包括取 e 也是成立的. 但运用到第 (3) 小题上, m 应当是 $(1,\mathrm{e}]$ 上的一个常数, 而 x_1、x_2 应该是 $(1,m]$ 上的任意两个变量, 所以当 m 推广到 e 时是否存在放宽条件的嫌疑? 所以解法中 $|H(x_1)-H(x_2)|<H(x)_{\max}-H(x)_{\min}=H(1)-H(m)$ 无疑是很好的思路, 值得斟酌的步骤在于 $H(1)-H(m)<H(1)-H(\mathrm{e})=\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-\frac{1}{2}<1$ 中能否将 m 推至 e 呢?

为了进一步验证, 我们可以假设 m 为 $(1,\mathrm{e}]$ 上一个常数, 不妨设其为 $\sqrt{\mathrm{e}}$, 则 x_1、x_2 为 $(1,\sqrt{\mathrm{e}}]$ 上的任意两个变量, $|H(x_1)-H(x_2)|<H(x)_{\max}-H(x)_{\min}=H(1)-H(m)$ 没有问题, 这是关于 x 的函数 $H(x)$ 在给定区间上的最值问题, 利用 $H(x)$ 在区间 $(1,m]$ 上的单调性可以得出结论, 此时 m 是定值.

在证明至 $H(1)-H(m)<1$ 的过程前 $H(1)$ 相对于 x 来说是定值, 但在后面的分析中, 整体的变量发生了转化.

若把 m 看成变量, 其一, $H(1)$ 不再是定值, 当被减数变了, $H(1)-H(m)$ 不能说 m 取最小时差最大;

再者, $H(m)$ 在得到 $m=\mathrm{e}$ 最小时利用到的是 $H(x)$ 这个函数, 其表达式为

$$H(x)=\frac{1}{2}x^2+m\ln x-(m+1)x,$$

是以 x 为自变量, m 为定值系数, 而 $H(m)$ 和 $H(x)$ 对应背景函数并非同一函数, 当 $H(m)$ 看成以 m 为自变量的函数时, 不仅是原来的变量 x 变成了自变量 m, 原来的定值系数 m 也成了自变量, 所以 $H(m)$ 是一个新的函数不再适用第 (2) 小题结论. 至此确定了该同学的做法并不完善, 但化定为动的思想值得肯定.

3. 问题的解决

为了体现参数由定到动的转化思想, 笔者将上述解法修改成更加自然、严谨的解法, 只要研究清楚新的关于m的函数即可, 故有

解法: $|H(x_1)-H(x_2)|$

$< H(x)_{\max}-H(x)_{\min}=H(1)-H(m)$,

下面考虑$H(1)-H(m)$这个函数, $m\in(1,\mathrm{e}]$.

$H(1)-H(m)=\left(-m-\frac{1}{2}\right)$

$-\left(-\frac{1}{2}m^2+m\ln m-m\right)$

$=\frac{1}{2}m^2-m\ln m-\frac{1}{2}$,记为$f(m)$.

因为$f'(m)=m-1-\ln m$, $f''(m)=1-\frac{1}{m}>0$, 所以$f'(m)$在$m\in(1,\mathrm{e}]$上为增函数, 而$f'(1)=0$, 故$f'(m)$在$m\in(1,\mathrm{e}]$上恒大于零, 即$f(m)$为增函数. 故

$f(m)<f(\mathrm{e})=\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-\frac{1}{2}<1$.

到此, 心里终于有些轻松, 找到了这个问题的正确解法, 由于问题本身的复杂性, 使第一种错误解法有很强的迷惑性, 解法的开头和结尾与正确解法的形式极为相近. 但本质上正确解法完全化归为m的一个新函数, 这个新函数的单调性必须通过重新求导研究, 而无法直接运用第(2)小题的结论. 因为m在第(2)小题中是定值, 第(3)小题中是变量, 意义发生了变化.

4. 问题的实践

为了进一步让学生理解这种参数在定量动量转化的思想, 若转化得当, 则能让问题解法更为简单, 若不能理解参数是定值还是变量, 则很容易得出错误结论, 在辨析了该同学的解法后, 布置了一组练习加以强化:

练习1 设函数$f(x)=x^4+ax^3+2x^2+b\,(x\in\mathbf{R})$, 其中$a$、$b\in\mathbf{R}$.

(1)当$a=-\frac{10}{3}$时, 讨论函数$f(x)$的单调性;

(2)若函数$f(x)$仅在$x=0$处有极值, 求a的取值范围;

(3)若对于任意的$a\in[-2,2]$, 不等式$f(x)\leqslant 1$在$[-1,1]$上恒成立, 求b的取值范围.

解: (1) $f'(x)=4x^3+3ax^2+4x=x(4x^2+3ax+4)$.

当$a=-\frac{10}{3}$时, $f'(x)=x(4x^2-10x+4)=2x(2x-1)(x-2)$.

令$f'(x)=0$, 得$x_1=0, x_2=\frac{1}{2}, x_3=2$.

当x变化时, $f'(x)$、$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},2\right)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$和$(2,+\infty)$上是增函数, 在区间$(-\infty,0)$和$\left(\frac{1}{2},2\right)$上是减函数.

(2) $f'(x)=x(4x^2+3ax+4)$, 显然$x=0$不是方程$4x^2+3ax+4=0$的根.

$\because$ $f(x)$仅在$x=0$处有极值,

则方程$4x^2+3ax+4=0$有两个相等的实根或无实根,

$\Delta=9a^2-4\times16\leqslant 0$,

解此不等式得$-\frac{8}{3}\leqslant a\leqslant\frac{8}{3}$,

这时, $f(0)=b$是唯一极值,

因此满足条件的a的取值范围是$\left[-\frac{8}{3}\ \frac{8}{3}\right]$.

(3) 由第2小题结论$a\in\left[-\frac{8}{3}\ \frac{8}{3}\right]$知, 当$a\in[-2,,2]$时, 将其看为$x$的函数, a为定值, 此时$f(x)$最大值在$x=\pm1$处取得,

只需$\begin{cases} f(1)=1+a+2+b\leqslant 1 \\ f(-1)=1-a+2+b\leqslant 1 \end{cases}$ 即可.

此时再将其看为a的一次函数, 转化为变量, 代入端点求得$b\leqslant -4$.

练习2 (2004年全国高考福建卷)已知$f(x)=4x+ax^2-\frac{2}{3}x^3\,(x\in\mathbf{R})$在区间$[-1,1]$上是增函数.

(I)求实数a的值组成的集合A;

(II)设关于x的方程$f(x)=2x+\frac{1}{3}x^3$的两个非零实根为x_1、x_2. 试问: 是否存在实数m, 使得不等式$m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$对任意$a\in A$及$t\in[-1,1]$恒成立? 若存在, 求$m$的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

解: (I) $f'(x)=4+2ax-2x^2$.

$\because$ $f(x)$在$[-1,1]$上是增函数,

$\therefore$ $f'(x)\geqslant 0$对$x\in[-1,1]$恒成立, 即

$x^2-ax-2\leqslant 0$ ·· ①

对$x\in[-1,1]$恒成立.

设$\varphi(x)=x^2-ax-2$.

方法一:

$$① \iff \begin{cases}\varphi(1)=1-a-2\leqslant 0,\\ \varphi(-1)=1+a-2\leqslant 0\end{cases}$$

$\iff -1\leqslant a\leqslant 1$.

$\because$ 对$x\in[-1,1]$, 只有当$a=1$时,

$f'(-1)=0$以及当$a=-1$时, $f'(1)=0$,

$\therefore\ A=\{a|-1\leqslant a\leqslant 1\}$.

方法二:

$$① \iff \begin{cases}\dfrac{a}{2}\geqslant 0,\\ \varphi(-1)=1+a-2\leqslant 0\end{cases}$$

$$或\begin{cases}\dfrac{a}{2}\leqslant 0,\\ \varphi(1)=1-a-2\leqslant 0\end{cases}$$

$\iff 0\leqslant a\leqslant 1$或$-1\leqslant a\leqslant 0$

$\iff -1\leqslant a\leqslant 1$.

$\because$ 对$x\in[-1,1]$, 只有当$a=1$时,

$f'(-1)=0$以及当$a=-1$时, $f'(1)=0$,

$\therefore\ A=\{a|-1\leqslant a\leqslant 1\}$.

(II) 由$4x+ax^2-\dfrac{2}{3}x^3=2x+\dfrac{1}{3}x^3$,

得$x=0$或$x^2-ax-2=0$.

$\because\ \Delta=a^2+8>0$,

$\therefore\ x_1$、x_2是方程$x^2-ax-2=0$的两非零实根, $x_1+x_2=a, x_1x_2=-2$,

从而$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2+8}$.

$\because\ -1\leqslant a\leqslant 1$,

$\therefore\ |x_1-x_2|=\sqrt{a^2+8}\leqslant 3$.

要使不等式$m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$对任意$a\in A$及$t\in[-1,1]$恒成立, 当且仅当$m^2+tm+1\geqslant 3$对任意$t\in[-1,1]$恒成立, 即

$m^2+tm-2\geqslant 0$ ································ ②

对任意$t\in[-1,1]$恒成立.

设$g(t)=m^2+tm-2=mt+(m^2-2)$.

方法一:

② $\iff g(-1)=m^2-m-2\geqslant 0$

且$g(1)=m^2+m-2\geqslant 0$

$\iff m\geqslant 2$或$m\leqslant -2$.

所以, 存在实数m, 使不等式$m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$对任意$a\in A$及$t\in[-1,1]$恒成立, 其取值范围是$\{m|m\geqslant 2或m\leqslant -2\}$.

方法二:

当$m=0$时,

② 显然不成立;

当$m\neq 0$时,

② $\iff m>0, g(-1)=m^2-m-2\geqslant 0$

或$m<0, g(1)=m^2+m-2\geqslant 0$

$\iff m\geqslant 2$或$m\leqslant -2$.

所以, 存在实数m, 使不等式$m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$对任意$a\in A$及$t\in[-1,1]$恒成立, 其取值范围是$\{m|m\geqslant 2或m\leqslant -2\}$.

(上接第6–17页)

证明.

柯西不等式在微积分的一般形式(也称柯西积分不等式), 设$f(x)$与$g(x)$都在$[a,b]$可积, 则$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$, 当且仅当$f(x)=t\cdot g(x)$或$g(x)=l\cdot f(x)$时等号成立.

柯西不等式是法国大数学家柯西(Cauchy, 1789–1857)的杰作, 柯西一生对数学的贡献非常卓越, 他不仅奠定了数学分析的理论基础, 数学中很多定理都冠以柯西的名字而命名. 如柯西不等式、柯西中值定理、柯西积分不等式等, 其中柯西不等式有着广泛的联系, 应用它能让你高瞻远瞩.

对一个经典例题的研究与联想, 并不是问题的终了, 不放过对经典题目的深入研究才有数学味道, 提示同行回归数学课本, 有"窥一斑而见全豹"的感觉. 简言之, 通过对课本例题的研究与联想, 恰如其分地发掘课本例题的功能, 了解数学的发展历史, 拓宽学生的数学视野, 体会数学的文化价值.

参考文献

[1] 南山. 柯西不等式与排序不等式[M]. 上海: 上海教育出版社, 1996.

[2] 史济怀. 数学小丛书5——平均[M]. 北京: 科学出版社, 1964.

减少分类讨论的两个有效手段

315502 浙江省奉化武岭中学 毛亦飞

分类讨论是数学学习中的重要思想方法, 学生在利用分类方法进行讨论时存在的主要问题是不能合理地分类, 有时重复, 有时遗漏; 有时分类太多, 或者太繁, 最后求解不完整; 或者时间消耗过多, 使得效率很低. 事实上利用分类方法进行讨论时要做到不重复、不遗漏, 的确不容易. 那么有没有减少或避免分类讨论的手段呢?

如果我们通过分析题中的条件, 深入挖掘, 的确可以适当优化分类方法, 减少讨论种类或缩小讨论范围, 提高解题的效率. 本文通过几个具体的例子以说明.

一、利用结论成立的充分条件优化分类方法

例1 已知函数$f(x)=x^2$, $g(x)=x-1$.

(1) 若存在$x\in\mathbf{R}$, 使$f(x)<bg(x)$, 求实数b的取值范围;

(2) 设$F(x)=f(x)-mg(x)+1-m-m^2$, 且$|F(x)|$在$[0,1]$上单调递增, 求实数m的取值范围;

(3) 已知$m\in\mathbf{R}$, 存在$x\in[1,2]$, 使$G(x)=|mf(x)-2g(x)|\leqslant 2$成立, 求实数$m$的取值范围.

对第(1)、(2)小题, 学生答得很好, 但第(3)小题不是很好. 主要原因是学生找不到解决问题的突破口;

其次是利用分类方法进行讨论的时候, 分类标准找不到或者是分类情况太多, 要分$m>0$, $m=0$, $m<0$三种情况, 当$m\neq 0$时, 又要按照对称轴与区间$[1,2]$的关系进行讨论, 情况比较多又繁琐.

如果我们可以仔细分析题目中的条件, 充分挖掘结论成立的充分条件, 就可以使解决问题变得方便. 要存在实数$x\in[1,2]$, 使$G(x)=|mf(x)-2g(x)|\leqslant 2$成立, 则它的充分条件就是存在某一个$x_0\in[1,2]$, 使$G(x_0)=|mf(x_0)-2g(x_0)|\leqslant 2$. 那么如何选择$x_0$呢? 一般来说, 先考虑简单方便的, 对于该题, 优先考虑$x_0=1$, $G(1)=|m|\leqslant 2$, 即$-2\leqslant m\leqslant 2$. 当然这样求出的m的取值范围不一定完整, 还应该考虑当$m>2$或者$m<-2$时, 是否存在$x_0\in[1,2]$, 使$G(x)=|mf(x)-2g(x)|\leqslant 2$成立. 实际上可以发现:

当$m>2$时, $G(x)$的$\Delta=4-8m<0$. 由于$x\in[1,2]$, 故

$G(x)=|mx^2-2x+2|=mx^2-2x+2>2x^2-2x+2\geqslant 2$.

当$m<-2$时, 由于$x\in[1,2]$, 故

$G(x)=|mx^2-2x+2|\geqslant|mx^2-2x|-2=-mx^2+2x-2>2x^2+2x-2\geqslant 2$.

因此当$m>2$或者$m<-2$时, $G(x)>2$, 即不存在$x\in[1,2]$, 使$G(x)=|mf(x)-2g(x)|\leqslant 2$成立.

综上可知, 当$-2\leqslant m\leqslant 2$时, 存在$x\in[1,2]$, 使$G(x)=|mf(x)-2g(x)|\leqslant 2$成立.

对于这个解法, 我们是利用充分条件: 当$x_0=1$时, $G(x)=|mf(x)-2g(x)|\leqslant 2$, 找到了$-2\leqslant m\leqslant 2$, 优化了分类方法, 减少了讨论的种类, 使得解决问题的效率提高了很多. 也许学生会觉得这个很凑巧, 但我们从解决问题的角度来考虑, 从特殊到一般, 先考虑区间的两个端点, 再选择区间的中点, 也会觉得很自然. 对于该题, 我们可以把$x_0=1$、2、$\dfrac{3}{2}$先后代入不等式$G(x)=|mf(x)-2g(x)|\leqslant 2$, 解得$m$的取值范围分别是$-2\leqslant m\leqslant 2$, $0\leqslant m\leqslant 1$和$-\dfrac{4}{9}\leqslant m\leqslant\dfrac{4}{3}$. 因此可以验证得$m$的取值范围是$-2\leqslant m\leqslant 2$. 这种解法比较凑巧的地方是, 对$m>2$和$m<-2$的验证方法比较简便.

因此, 在平时的教学中, 我们要适当地引导学生去发现题中的充分条件, 利用它优化分类方法, 减少讨论种类, 提高解题的效率.

二、利用结论成立的必要条件优化分类方法

数学中还有一类恒成立问题, 涉及求字母的取值范围. 我们在解决问题的时候可以先寻找问题的必要条件, 再在必要条件中寻找充要条件, 有时问题会变得简便且容易操作, 下面举几个例子.

例2　$f(x)=ax^3-3x+1$, 对于$x\in[-1,1]$, 总有$f(x)\geqslant 0$, 则a=______.

这是2008年全国江苏高考江苏卷的一道填空题. 解决该题的常规解法是求导, 然后利用分类方法进行讨论, 即便具有扎实数学基础的学生, 也得花7、8分钟的时间解决. 事实上, 我们可以利用必要条件, 先将区间内的特殊值代入来缩小讨论的范围. 优先考虑区间的两个端点, 得到$2\leqslant a\leqslant 4$. 如果还能继续寻找特殊的点, 如借助于二分法的思想, 找到特殊点$\frac{1}{2}$, 问题解决会更方便. 即$f\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant 0$得$a\geqslant 4$, 因此$a=4$.

例3　(2011年全国高考浙江卷) 设函数$f(x)=(x-a)^2\ln x$, $a\in\mathbf{R}$.

(1) 若$x=\mathrm{e}$为$y=f(x)$的极值点, 求实数a;

(2) 求实数a的取值范围, 使得对任意的$x\in(0,3\mathrm{e}]$, 恒有$f(x)\leqslant 4\mathrm{e}^2$成立.

该题是2011年浙江卷的最后一题, 解题思路很常规, 即求出$f(x)$在区间$(0,3\mathrm{e}]$上的最大值, 只要$f(x)$的最大值小于等于$4\mathrm{e}^2$就可以了. $f(x)$的最值要利用导数知识并利用分类方法进行讨论, 而学生找不到分类的标准, 再加上字母参数多, 又是最后一道解答题, 时间也不够充裕, 因此得分相对比较低. 如果学生能充分利用结论成立的必要条件, 那么该题的大部分分数还是可以拿到的.

当$x\in(0,3\mathrm{e}]$时, 对函数$f(x)$进行求导, 得$f'(x)=(x-a)\left(1+2\ln x-\frac{a}{x}\right)$. 到这步, 学生无法判断导函数的符号就止步了. 如果利用题目的必要条件 $f(3\mathrm{e})\leqslant 4\mathrm{e}^2$ 解得

$$3\mathrm{e}-\frac{2\mathrm{e}}{\sqrt{\ln 3\mathrm{e}}}\leqslant a\leqslant 3\mathrm{e}+\frac{2\mathrm{e}}{\sqrt{\ln 3\mathrm{e}}}.$$

由$3\mathrm{e}-\frac{2\mathrm{e}}{\sqrt{\ln 3\mathrm{e}}}=3\mathrm{e}-\frac{2\mathrm{e}}{\sqrt{1+\ln 3}}>3\mathrm{e}-2\mathrm{e}>1$得$a>1$, 这样就可解决导函数的符号问题了. 易判断$h(x)=1+2\ln x-\frac{a}{x}$在区间$x\in(0,3\mathrm{e}]$上是一个增函数. 又$h(1)=1-a<0$, $h(a)=2\ln a>0$, 因此必存在$x_0\in(1,a)$, 使$h(x_0)=0$. 经过这样的分析后, 我们已经可以对导函数$f'(x)=(x-a)\left(1+2\ln x-\frac{a}{x}\right)$的符号作出判断:

当$x\in(0,x_0)$时, $f'(x)>0$, $f(x)$单调递增;

当$x\in(x_0,a)$时, $f'(x)<0$, $f(x)$单调递减;

当$x\in(a,3\mathrm{e}]$时, $f'(x)>0$, $f(x)$单调递增.

所以当$x\in(0,3\mathrm{e}]$时, 最大值点只可能是$x=x_0$和$x=3\mathrm{e}$.

当$a=3\mathrm{e}-\frac{2\mathrm{e}}{\sqrt{\ln 3\mathrm{e}}}$时, 有$f(3\mathrm{e})=4\mathrm{e}^2$;

又由本例第(1)小题知, 当$a=3\mathrm{e}$时, $x_0=\mathrm{e}$为极值点, 且$f(\mathrm{e})=4\mathrm{e}^2$. 所以实数

$$a\in\left[3\mathrm{e}-\frac{2\mathrm{e}}{\sqrt{\ln 3\mathrm{e}}},3\mathrm{e}\right].$$

在这里, 我们通过题目的必要条件$f(3\mathrm{e})\leqslant 4\mathrm{e}^2$, 使得实数$a$的取值范围缩小为

$$3\mathrm{e}-\frac{2\mathrm{e}}{\sqrt{\ln 3\mathrm{e}}}\leqslant a\leqslant 3\mathrm{e}+\frac{2\mathrm{e}}{\sqrt{\ln 3\mathrm{e}}}.$$

又通过讨论导函数的符号使得函数$f(x)$的整体状况和最大值点非常清晰, 有利于问题的解决.

上面所举的例子在平时的教学中经常遇到. 分类方法是一种重要的解题策略, 对于培养学生思维的严密性、严谨性和灵活性以及提高学生分析问题和解决问题的能力无疑具有很大的帮助. 然而对于利用分类方法进行讨论问题, 学生很怕, 而学生的问题就是不知如何分类, 或者分类太多, 或者分类标准不清楚. 如果我们能够合理地分析题目, 挖掘题中的充分条件, 优化分类方法, 减少讨论种类; 利用必要条件, 缩小讨论的范围, 就可以事半功倍. 当然, 这不是可以一蹴而就的, 需要在平时教学中渗透, 要求学生仔细挖掘、深入分析、多思考、优化分类方法、减少讨论种类或者缩小讨论范围, 从而达到迅速、准确解题的目的.

参考文献

[1] 朱成杰. 数学思想方法教学研究导论[M]. 上海: 文汇出版社, 2001.

一题多解　沟通高数初数

430079 湖北省武汉市华中师范大学国家数字化学习工程技术研究中心　彭翕成

以前常有人问: 一个中学数学老师学那么多的高等数学课程, 到底有多大作用? 现在这样问的人少了, 高中教改使得教学内容变化较大, 又增加了许多选修内容. 那么高数与初数如何结合, 才能达到一种比较理想的状况呢?

很多数学家、数学教育家, 还有广大的高校老师、中学老师都在思考这个问题, 并不断有研究成果呈现. 如F克莱因的《高观点下的初等数学》、张奠宙, 邹一心的《现代数学与中学数学》算得上代表性著作. 如果不纠结于书名, 很多名家所写的普及性著作都可列入此列. 譬如上海教育出版社的《初等数学论丛》, 其中的文章, 居高临下, 深入浅出. 国内高校教师发表初数文章, 通常不被学校认可, 国外高校是认可初数文章的, 但其研究远比我们深入.

F克莱因曾提出一个名词: 双重忘记, 意思是进入大学学习高等数学忘记了中学数学, 毕业后去当中学老师又忘记了高等数学.. 据笔者所知, 确实是如此. 相当部分的大学生感觉不到大学数学和高中数学有什么联系, 基本上是重新学习一个新东西, 而不是在前面的基础上提升. 而走上中学教师的岗位之后, 所学的高数知识又不大用得上.

弗赖登塔尔强调: 为什么中学数学和大学数学之间缺口的弥补工作拖延了这么久, 至今仍未实现? 随着数学的社会重要性日益增长, 沟通缺口的迫切要求也更强烈. 今天我们若想实现F克莱因的想法, 去教"高观点下的初等数学", 就必须从接近中学数学的较低水平做起.

基于此, 笔者认为可以寻找一些题目, 分别用高数和初数方法来解, 两相对比看看各自特色, 加深对高数和初数的理解. 这些题目自然也成了沟通高数和初数之间天然的桥梁. 现举例如下.

例1　设N是具有1998位, 每一位都是1的十进位正整数, 即$N=\underbrace{111\cdots111}_{1998个1}$, 求$\sqrt{N}$小数点后第一千位.

高数解法: 设$N=\dfrac{10^{1998}-1}{9}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{N}&=\sqrt{\frac{10^{1998}-1}{9}}\\&=\frac{10^{999}}{3}\sqrt{1-10^{-1998}}\\&=\frac{10^{999}}{3}\left(1-\frac{10^{-1998}}{2}+\varepsilon\right)\end{aligned}$$

(此处用了泰勒展开),

$\varepsilon<\dfrac{10^{-3996}}{8}$, 则$10^{999}\sqrt{N}=\dfrac{10^{1998}-1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{10^{1998}\varepsilon}{3}$的小数点后第一位是1, 所以$\sqrt{N}$小数点后第一千位是1.

初数解法: 设$N=\dfrac{10^{1998}-1}{9}$,

$$\begin{aligned}10^{1000}\sqrt{N}&=10^{1000}\sqrt{\frac{10^{1998}-1}{9}}\\&=\frac{\sqrt{10^{3998}-10^{2000}}}{3},\end{aligned}$$

由$(10^{1999}-7)^2<10^{3998}-10^{2000}<(10^{1999}-4)^2$可得$\dfrac{10^{1999}-7}{3}<10^{1000}\sqrt{N}<\dfrac{10^{1999}-4}{3}$, 即$333\cdots331<10^{1000}\sqrt{N}<333\cdots332$, 所以$\sqrt{N}$小数点后第一千位是1.

评析: 高数解题, 由于工具强大, 解题十分简便, 而初数解法则需要更多的技巧.

例2　设s是单位圆周的任意一段整个位于第一象限的弧, A是位于弧s下面和x轴上面的区域的面积, B是位于y轴右侧和弧s左侧之间区域的面积. 证明: $A+B$只依赖于弧s的长度而与弧s的位置无关.

高数解法: $A=\displaystyle\int_{\cos\beta}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}dx$

$$=\int_{\beta}^{\alpha}\sqrt{1-\cos u^2}(-\sin u)du=\int_{\alpha}^{\beta}\sin^2 udu.$$

同理$B=\int_{\sin\alpha}^{\sin\beta}\sqrt{1-y^2}dy=\int_{\alpha}^{\beta}\cos^2 udu.$

所以$A+B=\int_{\alpha}^{\beta}\sin^2 udu+\int_{\alpha}^{\beta}\cos^2 udu$

$=\int_{\alpha}^{\beta}(\sin^2 u+\cos^2 u)du=\beta-\alpha.$

初数解法: 如图1,

$A+B=S_{EGKF}+S_{CDHG}+2S_{\overset{\frown}{GHK}}$

$=2(S_{\triangle OGK}+S_{\triangle OGH}+S_{\overset{\frown}{GHK}})$

$=2S_{\overset{\frown}{OHK}}.$

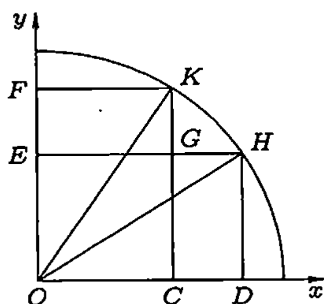


图1

评析: 虽然微积分才是解决面积问题的根本方法, 但对于此题而言, 使用微积分这一工具, 有点"高射炮打蚊子——大材小用", 初数巧解有时也让人惊叹.

以上两题出自美国大学生数学竞赛. 我国大学生数学竞赛基本上都是考察高数知识, 很少有这样可以用初等数学完成的题目. 出一些大学生能做, 中学生也能做的题目不是更好么?

例3 计算: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}$.

高数解法: 考虑级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{2^k}=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$,

对之求导$\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\frac{x^{k-1}}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^2}$;

对之求导$\sum\limits_{k=1}^{\infty}k(k-1)\frac{x^{k-2}}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^3}$;

将两式相加, 令$x=1$可得$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}=6$.

初数解法: 我们熟知$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$.

设$S=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}$,

则$\frac{S}{2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2\cdot 2^k}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^{k+1}}=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{2^k}$

$=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{2^k}+\frac{1-1}{2^1}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{2^k}$,

$\frac{S}{2}=S-\frac{S}{2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{2^k}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$,

所以$S=2$.

设$M=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}$,

则$\frac{M}{2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2\cdot 2^k}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^{k+1}}$

$=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)^2}{2^k}=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)^2}{2^k}+\frac{(1-1)^2}{2^1}$

$=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)^2}{2^k}$,

$\frac{M}{2}=M-\frac{M}{2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)^2}{2^k}$

$=2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=2\cdot 2-1=3$,

所以$M=6$.

评析: 此题来自一位网友的提问, 他想知道这个巧妙的高数解法到底是如何想到的. 对此, 笔者也无能为力. 若不是妙手偶得之, 必定是千锤百炼而成. 而笔者给出的初数解法则容易看懂一些, 用到的是求解无穷递缩等比数列时的入门方法.

例4 求数列$\sqrt{50},2\sqrt{49},3\sqrt{48},\cdots,49\sqrt{2}$, 50各项的最大值.

高数解法: $n\sqrt{51-n}=\sqrt{n^2(51-n)}$, 则$(n^2(51-n))'=-3n^2+102n=0$, 得$n=34$, 容易判断函数先增后减, 最大值为$34\sqrt{17}$.

初数解法: $n\sqrt{51-n}=\sqrt{n^2(51-n)}$, $n^2(51-n)=4\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot(51-n)\leqslant 4\cdot\left(\frac{51}{3}\right)^3$, 当且仅当$\frac{n}{2}=51-n$, 即$n=34$, 取得最大值$34\sqrt{17}$.

评析: 毫无疑问, 高数在解决极值问题方面优势是巨大的. 因为从数学的发展来看, 当初微积分的产生和发展, 其中原因就是为了求解极值问题. 初数解决需要拼凑, 才能使用均值不等式.

例5 求证: $\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}$, x、y、z都为正数.

分析: 如果是求证$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$, 则立刻可化为$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geqslant 0$. 加了一个变量之后, 证明

难度增加了不少. 有资料提供了证法1.

证法1: 设$f(x)=x^3-3abx+a^3+b^3, x\geqslant 0$, 则$f'(x)=3x^2-3ab$. 令$f'(x)=0, x=\sqrt{ab}$. 当$0\leqslant x\leqslant\sqrt{ab}$时, $f'(x)<0$; 当$\sqrt{ab}<x$时, $f'(x)>0$; 所以$f(x)$在$x=\sqrt{ab}$处取得最小值.

$f(\sqrt{ab})=(\sqrt{ab})^3-3ab\sqrt{ab}+a^3+b^3=(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3})^2\geqslant 0$, 所以

$f(c)=c^3-3abc+a^3+b^3\geqslant 0$, 换元可得$\dfrac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}$.

证法2: $\dfrac{a+b+c+d}{4}=\dfrac{\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{c+d}{2}}{2}\geqslant\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}\geqslant\sqrt[4]{abcd}$.

令$a=x, b=y, c=z, d=\sqrt[3]{xyz}$, 代入$\dfrac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}$可得$\dfrac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}$.

证法3: $x^3+y^3+z^3-3xyz=\dfrac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\geqslant 0$.

验证此式是容易的, 问题是如何发现这个恒等式呢? 为何$x^3+y^3+z^3-3xyz$含有$x+y+z$这一因子. 如果从行列式的角度来看, 一切都是显然的.

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\begin{vmatrix} x & y & z\\ z & x & y\\ y & z & x\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z\\ z & x & y\\ y & z & x\end{vmatrix}$$

$$=(x+y+z)(x^2-zy+y^2-xz+z^2-xy)$$

$$=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2].$$

评析: 证法1用了高数知识, 但反而不如证法2和证法3简练. 证法3中的恒等式好似无缘无故而来, 而借助高数知识却能理清其来路. 如果要证n元的均值不等式, 下面证法要比常见的数学归纳法等简便. 证明: 可用微积分先证$e^x\geqslant ex$ (略, 从图2来看是显然的).

设$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n}$, 则$e^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{G}}=e^{\frac{a_1}{G}}e^{\frac{a_2}{G}}\cdot\cdots\cdot e^{\frac{a_n}{G}}\geqslant\dfrac{ea_1}{G}\cdot\dfrac{ea_2}{G}\cdot\cdots\cdot\dfrac{ea_n}{G}=e^n$,

则$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n}$.

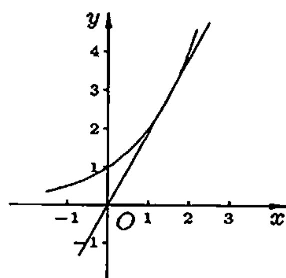


图2

总体来说, 初数是高数的基础, 高数是在初数基础上的一大飞跃. 高数中有很多有用的解题工具, 用起来非常方便. 但我们也不能认为, 凡是高数解法就一定要优于初数解法, 用了高数知识就高人一等. 以上的题目已经在一定程度上说明了这一点. 我们下面再给出一例.

例6　求证: $x^{10}-x^6+x^2-x+1>0$.

某资料认为此例直接证明十分困难, 需要构造函数才能巧妙解决. 于是给出下面的解法, 用到了微积分知识.

证法1: 设$x=a^4$, 构造函数$f(x)=a^2x^2-a^2x+a^2-a+1$.

当$a^2=0$时, $f(x)=1$;

当$a^2>0$时, $f'(x)=a^2(2x-1)$; 当$0<x<\dfrac{1}{2}$时, $f'(x)<0$; 当$\dfrac{1}{2}<x$时, $f'(x)>0$; 所以$f(x)$在$x=\dfrac{1}{2}$处取得最小值$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}a^2-a+1=\dfrac{1}{2}a^2+\left(\dfrac{1}{2}a-1\right)^2>0$, 所以$f(x)>0$.

以上的换元, 可列为怪招之内了, 证法不自然, 其实直接证明并不困难.

证法2: $x^{10}-x^6+x^2-x+1$

$$=\frac{1}{2}x^{10}+\frac{1}{2}(x^{10}-2x^6+x^2)+\frac{1}{2}(x^2-2x+1)+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}x^{10}+\frac{1}{2}x^2(x^4-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}$$

$$>\frac{1}{2}>0.$$

证法3: $x^{10}-x^6+x^2-x+1$

$$=x^2(x^8-x^4)+x^2-x+1$$

$$=x^2\left(x^4-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

$$>\frac{2}{3}>0.$$

一道高考折叠问题的求解及推广

314200　浙江省平湖市新华爱心高级中学　毛良忠

对立体几何的考查，在历年的高考中向来是小心翼翼的．一是由于新课程引进了向量工具后，几何的教学是重逻辑推理还是重演算方面争议很大；二是作为指挥棒的高考命题对平时教学的导向作用是不言而喻的．2009年是浙江新课程改革的高考第一年，在高考试卷上立体几何有一道填充题一道选择题和一大题，在填空题中首次出现了考查空间图形的翻折，在逻辑思维能力及运算能力、空间想象能力等方面进行了全面考查．2010年浙江卷中，几何翻折问题以15分的大题再次登场，在数学能力方面进行了更高要求的考查，在学生动手能力、空间想象能力、转化思想等方面提出了更高的考核要求．面对这样一个实践操作性很强的空间几何问题，许多考生望而却步纷纷败下阵来．下面笔者就这道高考题的求解和问题的推广做一番研究．

问题呈现　(2010年浙江卷理科第20题) 如图1，在矩形$ABCD$中，点E、F分别在线段上AB、AD上，$AE=EB=AF=\frac{2}{3}FD=4$．沿直线EF将$\triangle AEF$翻折成$\triangle A'EF$，使平面$A'EF\perp$平面BEF．

(I) 求二面角$A'-FD-C$的余弦值；

(II) 点M、N分别在线段FD、BC上，若沿直线MN将四边形$MNCD$向上翻折，使点C与点A'重合，求线段FM的长．

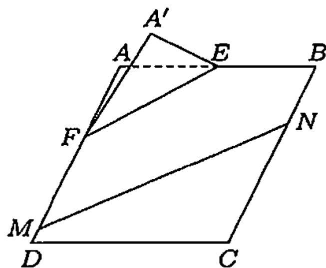


图1

对于这个问题的求解，可通过折一折、想一想、算一算来实施．通过实际动手演示发现，由于平面$A'EF\perp$平面BEF，可在折纸的过程中找到三条两两垂直的直线，进而转化为在空间直角坐标系中求解．在操作中不难发现在翻折过程中有$MC=MA'$和$NA'=NC$，选择哪个量来运算，由结论求线段FM的长应该选$MC=MA'$，具体过程如下：

在矩形$ABCD$中，由于$AE=AF=4$,平面$A'EF\perp$平面BEF，故建立如图2以直线EF为x轴，线段EF的垂直平分线为y轴，OA'为z轴的空间直角坐标系．

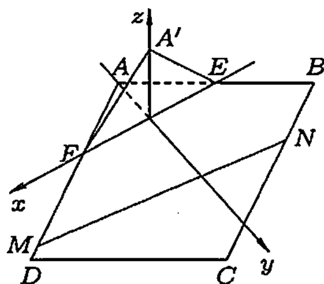


图2

易得$A'(0,0,2\sqrt{2})$、$E(-2\sqrt{2},0,0)$、$F(2\sqrt{2},0,0)$、$C(\sqrt{2},7\sqrt{2},0)$．设FM为m，则点M的坐标为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}m+2\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}m,0\right)$，由$MC=MA'$得

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}m+\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}m-7\sqrt{2}\right)^2$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}m+2\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)^2+(2\sqrt{2})^2,$$

计算得$m=\frac{21}{4}$．

(注：标准答案提供的建系方法是以直线AD为x轴，直线AB为y轴．)

对于上面的解答过程应该是令人满意的，如果我们将翻折后的图形，展开恢复到平面后又有什么发现呢？通过实际操作会发现，如果将上面的空间图形展开后折痕MN应与PC垂直(如图

3), 从量的角度看, 应有$AP^2+PH^2=CH^2$. 若将这个图3放到平面直角坐标系中, 如图4, 如果能求出直线MN的方程, 则FM的长就是DF与直线MN在y轴上截距的差. 这样的想法令人振奋, 下面的过程应该是自然的.

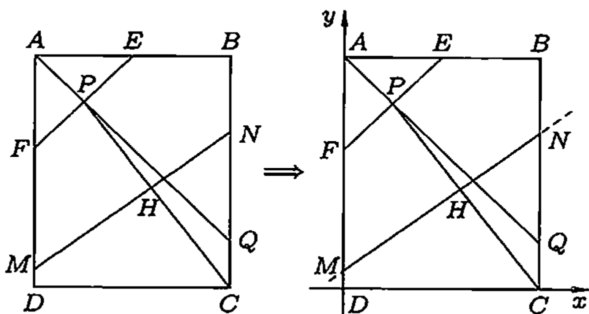


图3　　图4

具体过程: 以直线DC为x轴, 直线DA为y轴. 则$P(2,8)$、$C(8,0)$. $CH^2-PH^2=8$且$CH+PH=PC=10$, 解得$CH=\dfrac{27}{5}$.

由于直线PC的斜率为$-\dfrac{4}{3}$, 所以直线MN的斜率为$\dfrac{3}{4}$. 设直线MN的方程为$y=\dfrac{3}{4}x+b$, 由点C到直线MN的距离为$CH=\dfrac{27}{5}$得$b=\dfrac{3}{4}$. 故$FM=6-\dfrac{3}{4}=\dfrac{21}{4}$.

在翻折问题中, 将立体几何平面化, 借助平面解析法来操作, 这样的转化化归思想是高考对学生能力考查的重点, 是学生必须掌握的. 从上面的解答过程我们发现, 善于抓住图形的位置关系和运动中的内在数量关系(如$AP^2+PH^2=CH^2$)是解题的关键.

上面我们通过两种方法对这道高考题进行了解答, 如果折叠过程中两个平面组成的角是锐角或钝角又怎样折呢? 用我们数学的问题来说, 你能将此问题一般化吗? 即问题改为: 现沿直线EF将$\triangle AEF$翻折成$\triangle A'EF$, 使平面$A'EF$与平面BEF成α角, 若再沿直线MN将四边形$MNCD$向上翻折, 使点C与点A'重合, 求线段FM的长(如图5).

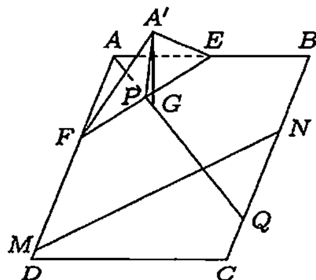


图5

这个问题对我们的思维提出了更大的挑战. 下面我们利用方法2将它展开后转化为平面问题进行探究.

如下图6, 设点A'在平面BCD上的投影为点G, 则$PG=AP\cos\alpha=2\sqrt{2}\cos\alpha$, 建立平面直角坐标系后, 如图7, 得

$$G(2+2\cos\alpha,8-2\cos\alpha)、C(8,0),$$

$$k_{GC}=\frac{4-\cos\alpha}{-3+\cos\alpha}, k_{MN}=\frac{3-\cos\alpha}{4-\cos\alpha}.$$

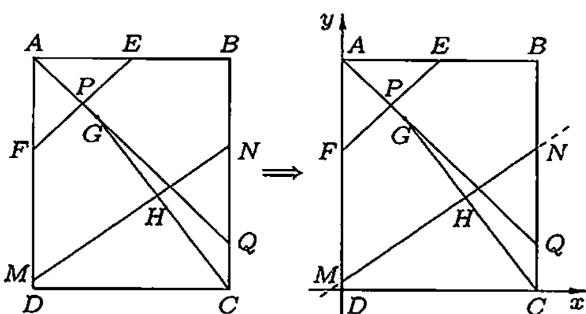


图6　　图7

设直线MN为$y=\dfrac{3-\cos\alpha}{4-\cos\alpha}x+b$. 由四边形$MNCD$向上翻折后点$C$与点$A'$重合得$HC^2-GH^2=(AP\sin\alpha)^2=8\sin^2\alpha$, 而$CG=HC+GH=2\sqrt{(3-\cos\alpha)^2+(4-\cos\alpha)^2}$, 解得$HC=\dfrac{27-14\cos\alpha}{\sqrt{(3-\cos\alpha)^2+(4-\cos\alpha)^2}}$.

又由点C到直线MN的距离

$$d=\frac{|8(3-\cos\alpha)+b(4-\cos\alpha)|}{\sqrt{(3-\cos\alpha)^2+(4-\cos\alpha)^2}}=HC,$$

故$b=\dfrac{3-6\cos\alpha}{4-\cos\alpha}$.

所以$FM=6-\dfrac{3-6\cos\alpha}{4-\cos\alpha}=\dfrac{21}{4-\cos\alpha}$.

特别地, 当$\alpha=90^\circ$时, $FM=\dfrac{21}{4}$.

更一般地, 若$AB=a, AD=b, AE=c$, $\angle AEF=\theta$, 平面$A'EF$与平面BEF成α角, 则满足题意的

$$FM=\frac{(a^2+b^2)\cos\theta-2bc\sin\theta}{[2b-c\sin 2\theta(1+\cos\alpha)]\cos\theta}.$$

善学、善思才能善作、善成, 在数学学习中我们如果能经常问如何、为何、能否等不断提升自己思辨的问题, 换一种眼光看问题, 那么我们的数学学习应该是快乐的, 这样的数学才是令人好玩有趣的.

一类取值范围问题的解法思考

224700 江苏省建湖高级中学 卜以军

在近几年全国各地的高考试题中，利用导数求不等式中某一参数的范围问题非常活跃，且常以压轴题的形式出现. 它的一般形式是：若关于x的不等式$f(x,a)\leqslant 0$(或$\geqslant 0$)对区间I中一切x都成立，求a的取值范围. 一般的解法有两种：一是求出$f(x,a)$在I中的最大值(或最小值)，进而求出a的范围；二是用参数分离法，即将不等式转化为$g(x)\leqslant a$(或$\geqslant a$)的形式，其中$g(x)$中不含参数a，再求出$g(x)$在I中的最大值(或最小值)，进而求出a的范围. 方法一通常要分类讨论，对能力的要求较高；方法二只需求出不含参数的函数的最大值或最小值，如果这个函数比较简单，则相对比较容易. 因此在平时的教学中，老师和同学们都喜欢用方法二，且屡试不爽. 但2010年的几道高考试题却使一些人备受打击，方法二似乎难上加难，且有些老师屡试未果，直至现在仍有人不断尝试，试图找到破解的方法. 因此，笔者认为，有对这类问题进行深入研究的必要，以供大家参考.

题1 (2010年新课标全国卷(理)第21题)设函数$f(x)=e^x-1-x-ax^2$.

(1)若$a=0$，求$f(x)$的单调区间；

(2)若当$x\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant 0$，求a的取值范围.

为便于分析、比较，现将原解法也一并给出：

(1)当$a=0$时，$f(x)=e^x-1-x$，$f'(x)=e^x-1$. 当$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$. 故$f(x)$在$(-\infty,0)$单调递减，在$(0,+\infty)$单调递增.

(2) $f'(x)=e^x-1-2ax$.

由(1)知$e^x\geqslant 1+x$，当且仅当$x=0$时等号成立. 故$f'(x)\geqslant x-2ax=(1-2a)x$.

从而当$1-2a\geqslant 0$，即$a\leqslant\frac{1}{2}$时，$f'(x)\geqslant 0$ $(x\geqslant 0)$，而$f(0)=0$，于是当$x\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant 0$. 由$e^x>1+x\,(x\neq 0)$可得$e^{-x}>1-x\ (x\neq 0)$.

从而当$a>\frac{1}{2}$时，$f'(x)<e^x-1+2a(e^{-x}-1)=e^{-x}(e^x-1)(e^x-2a)$.

故当$x\in(0,\ln 2a)$时，$f'(x)<0$，而$f(0)=0$，于是当$x\in(0,\ln 2a)$时，$f(x)<0$.

综合得a的取值范围为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

上述解法中第(2)小题应用了第(1)小题的结论，学生不易想到. 也可以不用第(1)小题的结论直接求解，这里不再赘述了. 如果采用参数分离法，则有：

当$x\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant 0$，即$e^x-1-x-ax^2\geqslant 0$，即$e^x-1-x\geqslant ax^2$.

当$x=0$时，不等式成立；

当$x>0$时，不等式即$\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\geqslant a$.

设$g(x)=\frac{e^x-x-1}{x^2}\ (x>0)$，

则有$g'(x)=\frac{e^x(x-2)+(x+2)}{x^3}$.

设$h(x)=e^x(x-2)+(x+2)\ (x>0)$，则有$h'(x)=e^x(x-2)+e^x+1=e^x(x-1)+1$.

设$m(x)=e^x(x-1)+1\ (x>0)$，则有$m'(x)=e^x(x-1)+e^x=xe^x$.

$\because x>0$时，$m'(x)>0$，$\therefore m(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，$\therefore m(x)>m(0)=0$.

从而$h'(x)>0$，$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，$\therefore h(x)>h(0)=0$.

从而$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数.

由于$x=0$不在$g(x)$的定义域中，且当$x\to 0$时，$g(x)=\frac{e^x-x-1}{x^2}$是$\frac{0}{0}$型的待定型，所以根据洛必达法则有：

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-x-1)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}.$$

因此$g(x)>\frac{1}{2}$，从而$a\leqslant\frac{1}{2}$，所以a的取值范围为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

题2　(2010年湖北卷(理)第21题)设函数$f(x)=ax+\frac{b}{x}+c(a>0)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=x-1$.

(1)用a表示出b、c;

(2)若$f(x)\geqslant\ln x$在$[1,+\infty)$上恒成立，求a的取值范围;

(3)略.

解:(1)$f'(x)=a-\frac{b}{x^2}$,

则有$\begin{cases}f(1)=a+b+c=0,\\f'(1)=a-b=1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}b=a-1,\\c=1-2a.\end{cases}$

(2)由(1)知，$f(x)=ax+\frac{a-1}{x}+1-2a$.

令$g(x)=f(x)-\ln x=ax+\frac{a-1}{x}+1-2a-\ln x,x\in[1,+\infty)$，则$g(1)=0$,

$$g'(x)=a-\frac{a-1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{ax^2-x-(a-1)}{x^2}=\frac{a(x-1)\left(x-\frac{1-a}{a}\right)}{x^2}.$$

(i)当$0<a<\frac{1}{2}$时，$\frac{1-a}{a}>1$.

若$1<x<\frac{1-a}{a}$时，则$g'(x)<0$，$g(x)$是减函数，所以$g(x)<g(1)=0$，即$f(x)<\ln x$，故$f(x)\geqslant\ln x$在$[1,+\infty)$上不恒成立.

(ii)当$a\geqslant\frac{1}{2}$时，$\frac{1-a}{a}\leqslant1$.

若$x>1$时，则$g'(x)>0$，$g(x)$是增函数，所以$g(x)>g(1)=0$，即$f(x)>\ln x$，故当$x\geqslant1$时，$f(x)\geqslant\ln x$.

综上所述，所求a的取值范围为$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

如果采用参数分离法，则有：$f(x)\geqslant\ln x$即$\left(x+\frac{1}{x}-2\right)a\geqslant\ln x+\frac{1}{x}-1$.

当$x=1$时，不等式成立;

当$x>1$时，不等式即$a\geqslant\frac{x\ln x+1-x}{(x-1)^2}$,

设$g(x)=\frac{x\ln x+1-x}{(x-1)^2}(x>1)$,

则
$$g'(x)=\frac{-(x+1)\ln x+2x-2}{(x-1)^3}=\frac{(x+1)\left(-\ln x+\frac{2x-2}{x+1}\right)}{(x-1)^3}.$$

设$h(x)=-\ln x+\frac{2x-2}{x+1}(x>1)$，则$h'(x)=-\frac{1}{x}+\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{-(x-1)^2}{x(x+1)^2}<0$.

$\therefore$ $h(x)$在$(1,+\infty)$上是减函数，$\therefore$ 当$x>1$时，$h(x)<h(1)=0$，即$g'(x)<0$.

所以$g(x)$在$(1,+\infty)$上是减函数.

又$x\to1$时，$g(x)=\frac{x\ln x+1-x}{(x-1)^2}$是$\frac{0}{0}$型的待定型，所以根据洛必达法则有:

$$\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x+1-x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{2x-2}=\lim_{x\to1}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ $g(x)<\frac{1}{2}$.

$\therefore$ $a\geqslant\frac{1}{2}$，所以a的取值范围为$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

题3　(2010年全国卷Ⅱ(理)第22题)设函数$f(x)=1-\mathrm{e}^{-x}$.

(1)证明：当$x>-1$时，$f(x)\geqslant\frac{x}{x+1}$;

(2)设当$x\geqslant0$时，$f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1}$，求$a$的取值范围.

分析：对于第(2)题，原解答因过程较长就不再列出了，请读者参看原试题解答. 现只分析参数分离的方法.

当$x\geqslant0$时，$f(x)\leqslant\frac{x}{ax+1}$，即$1-\mathrm{e}^{-x}\leqslant\frac{x}{ax+1}$.

当$a<0$时，$\because$ $x\geqslant0$时，$f(x)\geqslant f(0)=0$，而当$x>-\frac{1}{a}$时，$\frac{x}{ax+1}<0$，$\therefore$ 不等式不成立;

当$a\geqslant0$时，$x=0$时不等式成立. $x>0$时，不等式可化为$a\leqslant\frac{(x-1)\mathrm{e}^x+1}{x(\mathrm{e}^x-1)}$.

设$g(x)=\frac{(x-1)\mathrm{e}^x+1}{x(\mathrm{e}^x-1)}(x>0)$，可证$g(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，且当$x\to0$时，由洛必达法则有:

(下转第6-44页)

浅议2011年江苏省高考数学试卷第13题

226500 江苏省如皋市教师进修学校 徐 道

题1 (2011年江苏省高考数学试卷第13题) 设$1=a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_7$, 其中$a_1,a_3,a_5,a_7$成公比为$q$的等比数列, a_2,a_4,a_6成公差为1的等差数列, 则q的最小值是____.

此题解答如下:

显然有$q>1$. 依题意, 数列$a_1,a_2,\cdots,a_7$可改写成: $1,a_2,q,a_2+1,q^2,a_2+2,q^3$.

于是可得如下不等式$1\leqslant a_2\leqslant q\leqslant a_2+1\leqslant q^2\leqslant a_2+2\leqslant q^3$, 故可得如下不等式组:

$$\begin{cases}q\geqslant a_2\geqslant 1,\\ q^2\geqslant a_2+1\geqslant 2,\\ q^3\geqslant a_2+2\geqslant 3,\end{cases}\text{即}\begin{cases}q\geqslant 1,\\ q\geqslant\sqrt{2},\\ q\geqslant\sqrt[3]{3}.\end{cases}$$

又因$1<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$, 所以上述不等式组的解集为$q\geqslant\sqrt[3]{3}$, 即q的最小值为$\sqrt[3]{3}$, 填$\sqrt[3]{3}$.

假设将题1改为如下:

题2 设$1=a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_9$, 其中$a_1,a_3,a_5,a_7,a_9$成公比为$q$的等比数列, a_2,a_4,a_6,a_8成公差为1的等差数列, 则q的最小值是____.

仿题1解答可列如下不等式组:

$$\begin{cases}q\geqslant a_2\geqslant 1,\\ q^2\geqslant a_2+1\geqslant 2,\\ q^3\geqslant a_2+2\geqslant 3,\\ q^4\geqslant a_2+3\geqslant 4,\end{cases}\text{即}\begin{cases}q\geqslant 1,\\ q\geqslant\sqrt{2},\\ q\geqslant\sqrt[3]{3},\\ q\geqslant\sqrt[4]{4}.\end{cases}\quad\cdots\cdots(1)$$

在$1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[4]{4}$中最大的仍是$\sqrt[3]{3}$, 不等式组(1)的解集仍是$q\geqslant\sqrt[3]{3}$. 所以题2的答案与题1相同, 仍填$\sqrt[3]{3}$. 奇!

将题1、题2一般化, 有

题3 设$1=a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{2n+1}$ ($n\geqslant 3$, 且$n\in\mathbf{N}$), 其中$a_1,a_3,\cdots,a_{2n+1}$成公比为q的等比数列, $a_2,a_4,\cdots,a_{2n}$成公差为1的等差数列, 则q的最小值是____.

同样仿题1解答可列如下不等式组:

$$\begin{cases}q\geqslant 1,\\ q\geqslant\sqrt{2},\\ q\geqslant\sqrt[3]{3},\\ \cdots\\ q\geqslant\sqrt[n]{n}.\end{cases}\quad\cdots\cdots(2)$$

q的最小值为何值取决于不等式组(2)的解集是什么, 而欲解出不等式组(2)的关键是比较$1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n}$中谁最大. 要从理论上解决此问题, 需高等数学的知识, 因而题1有一定的高等数学背景.

构造函数$y=x^{\frac{1}{x}},x\in[1,+\infty)$. 现在先讨论此函数的单调性, 利用初等数学已无能为力了.

对$y=x^{\frac{1}{x}}$两端取对数, $\ln y=\frac{1}{x}\ln x$. 两端求导, 利用复合函数求导法则得: $\frac{1}{y}\cdot y'=(\ln x)'\cdot\frac{1}{x}+\ln x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$,

$$\therefore y'=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}(1-\ln x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

由于$x^{\frac{1}{x}-2}>0$, 故当$x<\mathrm{e}$时$y'>0$; $x>\mathrm{e}$时$y'<0$, 所以$y=x^{\frac{1}{x}},x\in[1,+\infty)$当$x\in[1,\mathrm{e})$时是增函数; 当$x\in(\mathrm{e},+\infty)$时为减函数. 于是$y=x^{\frac{1}{x}},x\in[1,+\infty)$有最大值为$\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$. 当$x$取正整数时$\sqrt[3]{3}$最大, 因而不等式组(2)的解集仍是$q\geqslant\sqrt[3]{3}$, 故$q$的最小值仍是$\sqrt[3]{3}$, 仍与题1答案相同.

将题3中"$a_2,a_4,\cdots,a_{2n}$成公差为1的等差数列"改为"$a_2,a_4,\cdots,a_{2n}$成公差为2的等差数列", 其余条件不变, 得

题4 q的最小值是____.

仍仿题1解答可列如下不等式组:

$$\begin{cases}q\geqslant 1,\\ q\geqslant\sqrt{3},\\ q\geqslant\sqrt[3]{5},\\ \cdots\\ q\geqslant\sqrt[n]{2n-1}.\end{cases}\quad\cdots\cdots(3)$$

同样需要比较$1, \sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \cdots, \sqrt[n]{2n-1}$这$n$个数谁最大, 也就是要讨论$f_1(x)=(2x-1)^{\frac{1}{x}}$, $x\in[1,+\infty)$的单调性, 仍用对数求导法得$f_1'(x)=(2x-1)^{\frac{1}{x}-1}\cdot x^{-2}[2x-(2x-1)\ln(2x-1)]$. 而$(2x-1)^{\frac{1}{x}-1}x^{-2}>0$, 故要判别$f_1'(x)$正负性也就是要判别$2x-(2x-1)\ln(2x-1)$的正负性了.

令$g_1(x)=2x-(2x-1)\ln(2x-1)$, 则$g_1'(x)=2-\left[2\ln(2x-1)+(2x-1)\cdot\dfrac{2}{2x-1}\right]=-2\ln(2x-1)$. 又当$x>1$时$\ln(2x-1)>0$, 所以当$x>1$时$g_1'(x)<0$, 得$g_1(x)$在$(1,+\infty)$上为减函数.

$g_1(1)=2>0$, $g_1(2)=4-3\ln3>0$, $g_1(3)=6-5\ln5<0$.

又$g_1(x)$为连续函数, 故在$[2, 3]$之间存在一点ξ, 当$x\in[1,\xi)$时, $g_1(x)>0$; 当$x\in[\xi,+\infty)$时$g_1(x)<0$. 也就是当$x\in[1,\xi)$时$f_1(x)=(2x-1)^{\frac{1}{x}}$是增函数; 当$x\in(\xi,+\infty)$时$f_1(x)=(2x-1)^{\frac{1}{x}}$是减函数. 因而$\xi$就是$f_1(x)=(2x-1)^{\frac{1}{x}}$的最大值点, 所以要找$1, \sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \cdots, \sqrt[n]{2n-1}$ ($n\geqslant3$, 且$n\in N$)这n个数谁最大, 只要比较$\sqrt{3}$与$\sqrt[3]{5}$就可以了.

显然$\sqrt{3}>\sqrt[3]{5}$. 故不等式组(3)的解集为$q\geqslant\sqrt{3}$, q的最小值为$\sqrt{3}$.

再将题3中"$a_2, a_4, \cdots, a_{2n}$成公差为1的等差数列"改为"$a_2, a_4, \cdots, a_{2n}$成公差为3的等差数列", 其余不变, 得

题5 仍要求q的最小值.

与题4的结果有无关联呢?

仿题4之讨论, 可得q的最小值为$\sqrt{4}$, 即2. 与题4的答案有关联, 都等于$\sqrt{1+d}$ (d为等差数列$a_2, a_4, \cdots, a_{2n}$的公差).

若将题3中"$a_2, a_4, \cdots, a_{2n}$成公差为1的等差数列"改为"$a_2, a_4, \cdots, a_{2n}$成公差为d ($d\geqslant2$)的等差数列", 其余条件不变, 仍要求q的最小值, 则仿题4、题5可得q的最小值为$\sqrt{1+d}$. 这就产生一个非常有趣的问题: "在$a_2, a_4, \cdots, a_{2n}$成公差为d的等差数列"这一条件下, d取怎样一最小值, 就能保证q的最小值为$\sqrt{1+d}$. 显然$d\leqslant2$, 于是提出

题6 设$1=a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{2n+1}$ ($n\geqslant3, n\in\mathbf{N}$), 其中有$a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{2n+1}$成公比为$q$的等比数列, $a_2, a_4, \cdots, a_{2n}$成公差为d的等差数列, 当q的最小值取$\sqrt{1+d}$时, d的最小值是______.

也可得如下不等式组:

$$\begin{cases} q\geqslant1, \\ q\geqslant\sqrt{1+d}, \\ \cdots \\ q\geqslant\sqrt[n]{1+(n-1)d}. \end{cases}$$

依题意就是要求$1, \sqrt{1+d}, \cdots, \sqrt[n]{1+(n-1)d}$中$\sqrt{1+d}$最大时, d的最小值是多少?

首先应有$\sqrt{1+d}\geqslant\sqrt[3]{1+2d}$, 两端同时6次方, 得$(1+d)^3\geqslant(1+2d)^2$, 即有$d^3-d^2-d\geqslant0$. 显然, $d>0$, 故$d^2-d-1\geqslant0$, 解得$d\geqslant\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, d可取$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

当$d=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$时, 可知$\sqrt{1+d}=\sqrt[3]{1+2d}$, 但$\sqrt{1+d}$是否大于等于$\sqrt[4]{1+3d}, \sqrt[5]{1+4d}, \cdots, \sqrt[n]{1+(n-1)d}$呢?

构造函数$f_2(x)=[1+(x-1)d]^{\frac{1}{x}}, x\in(1,+\infty)$, 其中$d=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. 对$f_2(x)$求导, 得$f_2'(x)=[1+(x-1)d]^{\frac{1}{x}-1}\cdot x^{-2}[dx-(dx+1-d)\ln(dx+1-d)]$, 而$[1+(x-1)d]^{\frac{1}{x}-1}\cdot x^{-2}$恒大于0. 因而要判断$f_2'(x)>0$还是$<0$, 只需考察$dx-(dx+1-d)\ln(dx+1-d)$何时为正何时为负即可.

令$g_2(x)=dx-(dx+1-d)\ln(dx+1-d)$, 则$g_2'(x)=d-\left[d\ln(dx+1-d)+\dfrac{(dx+1-d)d}{dx+1-d}\right]=-d\ln(dx+1-d)$.

由于$d>0$, 而当$x>1$时, $dx+1-d>1$, $\ln(dx+1-d)>0$, 故当$x>1$时, $g_2'(x)<0$, $g_2(x)$是单调减函数.

$g_2(1)=d>0$.

$$g_2(2)=2d-(d+1)\ln(d+1)=2\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)=1+\sqrt{5}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)>0.$$

$$g_3(3)=3d-(2d+1)\ln(2d+1)=\frac{3+3\sqrt{5}}{2}-(2+\sqrt{5})\ln(2+\sqrt{5})<0.$$

故由$g_2(x)$的连续性及单调性, 在$(2, 3)$内必存在唯一一点ξ, 使$g_2(\xi)=0$. 因而在$(2,\xi)$内

$g_2(x) > 0, f_2(x)$是增函数; 在$(\xi,+\infty)$内$g_2(x) < 0, f_2(x)$是减函数; 故ξ是$f_2(x)$的最大值点, 所以$f_2(3) > f_2(4) > \cdots > f_2(n)$, 故$1, \sqrt{1+d}, \sqrt[3]{1+2d}, \cdots, \sqrt[n]{1+(n-1)d}$比较谁最大, 只需要比较$\sqrt{1+d}, \sqrt[3]{1+2d}$, 而又知$\sqrt{1+d} = \sqrt[3]{1+2d}$. 所以$1, \sqrt{1+d}, \sqrt[3]{1+2d}, \cdots, \sqrt[n]{1+(n-1)d}$中最大的一个是$\sqrt{1+d}$(或$\sqrt[3]{1+2d}$)时$d$的最小值为$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. 此即为题6的答案. 如果我们再把$q$的最小值算出来, $g = \sqrt{1+d} = \sqrt{1+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. d的最小值与q的最小值竟然相等, 都等于$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. 妙!

现在再将题3的条件"$a_1 = 1$"改为"$a_1 = 2$", 其余条件不变, 得

题7 仍求q的最小值.

重复题1的解答过程, 可得如下不等式组:

$$\begin{cases} q \geqslant 2, \\ q \geqslant \sqrt{3}, \\ q \geqslant \sqrt[3]{4}, \\ \cdots \\ q \geqslant \sqrt[n]{n+1}. \end{cases}$$

凭直觉, 此不等式组的解集为$q \geqslant 2$. 而当$n=1,2,3$时, 不等式组的解集均为$q \geqslant 2$. 故只要证明$n \geqslant 4$时$\sqrt[n]{n+1} < 2$, 即欲证$n+1 < 2^n$.

由于当$n \geqslant 4$时, $2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n > 1+n$. $\therefore n+1 < 2^n$, 即得$2, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \cdots, \sqrt[n]{n+1}$中最大的是2, 故$q$的最小值为2, 此即题7的答案.

同样, 题3中将"$a_1 = 1$"改为"$a_1 = a \geqslant 2$", 其余条件不变, 则q的最小值就是a_1, 于是又产生一个有趣的问题"在$a_2, a_4, \cdots, a_{2n}$成公差为1的等差数列"这一条件下, a_1取怎样一最小值就能保证q的最小值为a_1? 显然$a \leqslant 2$. 因而有

题8 设$a = a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{2n+1}$ $(n \in \mathbf{N}_+)$, 其中$a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{2n+1}$成公比为$q$的等比数列, $a_2, a_4, \cdots, a_{2n}$成公差为1的等差数列, 当q的最小值取a时, a的最小值是______.

亦可得如下不等式组:

$$\begin{cases} q \geqslant a, \\ q \geqslant \sqrt{a+1}, \\ q \geqslant \sqrt[3]{a+2}, \\ \cdots \\ q \geqslant \sqrt[n]{a+(n-1)}. \end{cases}$$

依题意就是要求$a, \sqrt{a+1}, \sqrt[3]{a+2}, \cdots\cdots, \sqrt[n]{a+(n-1)}$中$a$最大时, a的最小值是多少?

首先应有$a \geqslant \sqrt{a+1}$, 必有$a > 0, a^2 - a - 1 \geqslant 0$, 解之, $a \geqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. 以下仿题6之讨论, 可得$a$的最小值是$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. 又是奇事一件, 题8与题6答案居然相同. 妙哉, 妙不可言也.

(上接第6-41页)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)e^x+1}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{(x+1)e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)e^x}{(x+2)e^x} = \frac{1}{2},$$

从而$g(x) > \dfrac{1}{2}$.

所以$a \leqslant \dfrac{1}{2}$, 即a的取值范围是$\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

从上面的分析中我们可以得到如下一般性的结论: 如果函数$g(x)$在区间I上是单调增函数, 而区间右端点(或左端点)不在定义域中, 且在区间右端点(或左端点)函数的极限值是$\dfrac{0}{0}$或者说$\dfrac{\infty}{\infty}$的待定型时, 则形如:"当$x \in I$时, $g(x) \leqslant a$(或$\geqslant a$)恒成立"的问题在现行高中教材的体系下就较难使用参数分离的方法解决, 而需要使用洛必达法则求出极限值.

对于函数$g(x)$在区间I上是单调减函数的情形, 也有类似结论, 不再赘述. 由此我们还可以认识到, 任何一种数学方法都有它的适用范围, 某种场合下是最好的方法, 在另一种场合下可能就比较繁琐, 甚至有可能进入死胡同. 分类讨论是一种重要的解题方法和解题策略, 刻意避免分类讨论会使我们的学生失去很好的训练机会. 因此在平时的教学中, 我们应该要求学生对每种方法都要掌握. 文中的三道高考试题的出发点是综合考查运用函数、导数、不等式知识分析问题和解决问题的能力, 考查分类讨论的数学思想方法的运用能力, 反映了命题专家对分类讨论的思想和方法的重要性的广泛认同. 因此, 加强分类讨论的思想和方法的训练完全符合新课程标准的要求和高考考查能力的要求.

一道北京大学保送生数学试题的探究

300387 天津师范大学数学系 边 欣

2011年北京大学保送生测试数学部分的第4题为:

题目 设$f(x)=x^2+px+q$, 其中p、$q\in\mathbf{R}$. 若$f(f(x))=0$只有一个实数根, 求证: p、$q\geqslant 0$.

文[1]给出试题的两种证法. 笔者发现, 试题的结论可以加强为如下定理.

定理 设$f(x)=x^2+px+q$, 其中p、$q\in\mathbf{R}$. 若$f(f(x))=0$只有一个实数根, 则存在$r\geqslant 0$, 使得

$$p=2r^2+2r, q=r^4+2r^3.$$

且$f(f(x))=0$的唯一实数根为$x=-r^2-r$.

证明: 因为

$$f(x)=x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

若$q>\frac{p^2}{4}$, 则对任意的实数x, $f(x)>0$, 从而$f(f(x))=0$无实数根, 矛盾. 故$q\leqslant\frac{p^2}{4}$.

令$r=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, 则$f(x)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-r^2$.

由$f(x)=0$, 得$x_1=-\frac{p}{2}+r, x_2=-\frac{p}{2}-r$. 即$f(x_1)=0, f(x_2)=0$.

记$f(f(x))=0$的唯一实数根为$x=x_0$. 则$f(x_0)=x_1$或$f(x_0)=x_2$.

下面证明$x_0=-\frac{p}{2}$, 且$x_1=f(x_0)=-r^2$.

事实上, 对任意的$i=1, 2$, 由$f(x)=x_i$, 即$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x_i+r^2$, 可知

(1) 当$x_i+r^2<0$时, $f(x)=x_i$无实数根;

(2) 当$x_i+r^2=0$时, $f(x)=x_i$有唯一的实数根$-\frac{p}{2}$;

(3) 当$x_i+r^2>0$时, $f(x)=x_i$有两个不同的实数根$-\frac{p}{2}\pm\sqrt{x_i+r^2}$.

若$x_1+r^2<0$. 因为$r\geqslant 0$, 故$x_1\geqslant x_2$, 从而$x_2+r^2<0$. 根据(1), $f(x)=x_1$与$f(x)=x_2$均无实数根, 这与$f(f(x))=0$有实数根矛盾.

若$x_1+r^2>0$. 根据(3), $f(x)=x_1$有两个不同的实数根$-\frac{p}{2}\pm\sqrt{x_1+r^2}$. 这与$f(f(x))=0$只有一个实数根矛盾.

从而$x_1+r^2=0$. 根据(2), $f(x)=x_1$有唯一的实数根$-\frac{p}{2}$, 即$x_0=-\frac{p}{2}$.

由$x_1+r^2=0$, 即$-\frac{p}{2}+r+r^2=0$, 得$p=2r^2+2r$. 从而$x_0=-r^2-r$.

再由$r=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, 得$q=\frac{p^2}{4}-r^2$, 即$q=r^4+2r^3$. 证毕.

进一步可以求出定理中$f(f(x))=0$的全部根.

因为$f(x)=x^2+(2r^2+2r)x+r^4+2r^3=(x+r^2+r)^2-r^2$, 故

$$\begin{aligned}f(f(x))&=(f(x)+r^2+r)^2-r^2\\&=[(x+r^2+r)^2+r]^2-r^2\\&=(x+r^2+r)^2[(x+r^2+r)^2+2r].\end{aligned}$$

从而$f(f(x))=0$的全部根为$-r^2-r$, $-r^2-r\pm\sqrt{2r}\,\mathrm{i}$. 其中$\mathrm{i}^2=-1$.

定理中$r\geqslant 0$.

若$r=0$, 则$f(x)=x^2$.

$f(f(x))=0$有一个实数根0, 没有复数根.

若$r=1$, 则$f(x)=x^2+4x+3$.

$f(f(x))=0$有一个实数根-2, 两个共轭复数根$-2\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$.

若$r=2$, 则$f(x)=x^2+12x+32$.

$f(f(x))=0$有一个实数根-6, 两个共轭复数根$-6\pm 2\mathrm{i}$.

参考文献

[1] 范端喜. 2011年北大保送生考试数学试题赏析[J]. 数学通讯, 2011(4)(下半月教师): 53−55.

数学问题与解答

2012年第4期问题解答

851. 在$\triangle ABC$中, $\angle BAC=90°$, $AB=AC$, 点M_1、M_2在边AC上, 且$AM_1=CM_2$, 过A作$AH_1\perp BM_1$于H_1, $AH_2\perp BM_2$于H_2, O为BC的中点, 求证: $AH_1\cdot AH_2=2\cdot OH_1\cdot OH_2$.

(610031 四川成都市 宿晓阳供题)

图 1

证: 如图1, 连AO、CH_1和CH_2, 则$\angle BAO=45°$, $\angle AOB=90°$, 再由$AH_1\perp BM_1$, $AH_2\perp BM_2$, 知点A、B、O、H_2和H_1五点共圆. 于是$\angle BH_2O=\angle BH_1O=\angle BAO=45°$, 从而

$$\begin{aligned}\frac{AM_1}{CM_1}&=\frac{S_{\triangle BAM_1}}{S_{\triangle BCM_1}}=\frac{S_{\triangle AH_1M_1}}{S_{\triangle CH_1M_1}}\\&=\frac{S_{\triangle ABM_1}-S_{\triangle AH_1M_1}}{S_{\triangle BCM_1}-S_{\triangle CH_1M_1}}\\&=\frac{S_{\triangle ABH_1}}{S_{\triangle BCH_1}}=\frac{S_{\triangle ABH_1}}{2S_{\triangle BOH_1}}\\&=\frac{\frac{1}{2}AH_1\cdot BH_1}{OH_1\cdot BH_1\cdot\sin 45°}=\frac{AH_1}{\sqrt{2}OH_1}.\end{aligned}$$

同理, $\dfrac{AM_2}{CM_2}=\dfrac{AH_2}{\sqrt{2}OH_2}$.

又$AM_1=CM_2$, 所以$AM_2=CM_1$,

故 $\dfrac{AH_1}{\sqrt{2}OH_1}=\dfrac{\sqrt{2}OH_2}{AH_2}$,

即 $AH_1\cdot AH_2=2\cdot OH_1\cdot OH_2$.

852. 设实数a、b使方程$x^4-ax^3-bx^2-ax+1=0$有实根, 求a^2+b^2的最小值.

(473200 河南省方城县教研室 邵明宪供题)

解: $x^4-ax^3-bx^2-ax+1=0$

$\iff x^2-ax-b-\dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\iff \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-a\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-b-2=0.$

因$\left|x+\dfrac{1}{x}\right|=|x|+\dfrac{1}{|x|}\geqslant 2$, 故方程$x^4-ax^3-bx^2-ax+1=0$有实根$\iff$存在实数$t$, 使$t^2-2=at+b$, 且$|t|\geqslant 2$. ……………………(*)

由(*)式及柯西不等式:

$(t^2-2)^2=(at+b)^2$

$\leqslant(a^2+b^2)(t^2+1)\qquad(|t|\geqslant 2)$,

等号成立当且仅当$a=bt$. 故

$$\begin{aligned}a^2+b^2&\geqslant\frac{(t^2-2)^2}{t^2+1}\\&=t^2+1+\frac{9}{t^2+1}-6\geqslant\frac{4}{5},\end{aligned}$$

等号成立当且仅当$\begin{cases}|t|=2,\\a=bt,\\t^2-at-b-2=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}a=\dfrac{4}{5},\\b=\dfrac{2}{5},\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=-\dfrac{4}{5},\\b=\dfrac{2}{5}.\end{cases}$

所以a^2+b^2的最小值为$\dfrac{4}{5}$.

853. 已知正整数$N=4c+3\,(c\in\mathbf{N}^*)$为合数, 求证: N的因数个数(含1和它本身)为偶数.

(433123 湖北省潜江市江汉油田高级中学 舒云水供题)

证: 设N有k个不同质因数: $p_1,\cdots,p_k$, $N=p_1^{\alpha_1}\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k},\alpha_i\in\mathbf{N}^*,i=1,\cdots,k$.

因为N为奇数, 所以$p_1,\cdots,p_k$都是奇数, 从而$p_i\,(i=1,\cdots,k)$被4除余1或3.

若$p_i\,(i=1,\cdots,k)$都被4除余1, 设$p_1=4m_1+1,\cdots,p_k=4m_k+1$, 则$N=(4m_1+1)^{\alpha_1}\cdot\cdots\cdot(4m_k+1)^{\alpha_k}$, 根据二项式定理易知$N$此时被4除余1, 这与$N$被4除余3矛盾. 所以$p_i\,(i=1,\cdots,k)$中至少有一个被4除余3.

当$s\,(s\in\mathbf{N}^*)$为偶数时, $(4m+3)^s=[(4m+3)^2]^{\frac{s}{2}}=[4(4m^2+6m+2)+1]^{\frac{s}{2}}$, $(4m+3)^s$被4除余1.

若$p_i\,(i=1,\cdots,k)$中被4除余3的质因数的指数都是偶数, 则$p_1^{\alpha_1}\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}$都被4除余1, 这又与$N$被4除余3矛盾.

综上可知, $p_i\,(i=1,\cdots,k)$中至少有一个p_j被4除余3, 且p_j的指数α_j为奇数. 由于α_j+1为偶数, 所以N的因数个数$(\alpha_1+1)\cdot\cdots\cdot(\alpha_j+1)\cdot\cdots\cdot(\alpha_k+1)$为偶数.

854. 设$x_i>1$, $i=1,2,\cdots,n\,(n\geqslant 3)$, 且$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=n-1$, 求证: $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i-1}$.

(712000 陕西省咸阳师范学院基础教育课程研究中心 安振平供题)

证: 应用二元均值不等式, 得

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i-1}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}}=\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\frac{x_j-1}{x_j}\cdot\frac{x_j}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}}$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{x_j-1}{x_j}+\frac{x_j}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{1}{x_j}+\frac{x_j}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(n-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}+\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[n-(n-1)+\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\right]=1.$$

故有$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i-1}$.

855. $\triangle ABC$中, 三内角A、B、C所对三边长分别为a、b、c, 外接圆、内切圆半径分别为R、r, 求证: $\frac{2}{R^2}\leqslant\frac{\csc^2\frac{A}{2}}{b^2+c^2}+\frac{\csc^2\frac{B}{2}}{c^2+a^2}+\frac{\csc^2\frac{C}{2}}{a^2+b^2}\leqslant\frac{1}{2r^2}$.

(643200 四川省富顺县城关中学 李显权供题)

证: 如图2, 设$\triangle ABC$的内切圆$\odot I$依次与三边BC、CA、AB相切于D、E、F, 在AB、AC边上分别截取点M、N, 使得$AM=AN=AI$, 连MN, 注意到$AI\perp MN, IE\perp AN, IF\perp AM$, 易知

$$S_{\triangle AMN}=S_{\triangle AIE}+S_{\triangle AFI}=S_{\text{四边形}AFIE}.$$

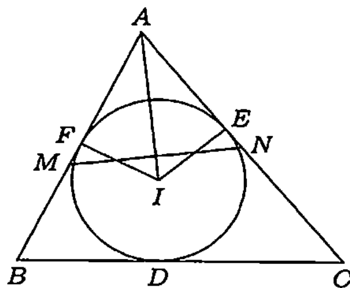


图2

利用三角形的面积公式, 有

$$\frac{IA^2}{AB\cdot AC}=\frac{\frac{1}{2}AM\cdot AN\cdot\sin A}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A}$$

$$=\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\text{四边形}AFIE}}{S_{\triangle ABC}}.$$

同理可得$\frac{IB^2}{BC\cdot BA}=\frac{S_{\text{四边形}BDIF}}{S_{\triangle ABC}}$,

$$\frac{IC^2}{CA\cdot CB}=\frac{S_{\text{四边形}CEID}}{S_{\triangle ABC}}.$$

将以上三式相加, 即得

$$\frac{IA^2}{AB\cdot AC}+\frac{IB^2}{BC\cdot BA}+\frac{IC^2}{CA\cdot CB}=1.$$

又由$IA=\frac{IE}{\sin\frac{A}{2}}=r\csc\frac{A}{2}$等, 并利用二元均值不等式可得

$$\frac{r^2\csc^2\frac{A}{2}}{\frac{1}{2}(AB^2+AC^2)}+\frac{r^2\csc^2\frac{B}{2}}{\frac{1}{2}(BC^2+BA^2)}+\frac{r^2\csc^2\frac{C}{2}}{\frac{1}{2}(CA^2+CB^2)}\leqslant 1,$$

即 $\frac{\csc^2\frac{A}{2}}{b^2+c^2}+\frac{\csc^2\frac{B}{2}}{c^2+a^2}+\frac{\csc^2\frac{C}{2}}{a^2+b^2}\leqslant\frac{1}{2r^2}$.

以下两次使用平方和不等式, 并注意到三角形中熟知的不等式 $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{2}$ 及 $a^2+b^2+c^2\leqslant 9R^2$, 可得

$$\frac{\csc^2\frac{A}{2}}{b^2+c^2}+\frac{\csc^2\frac{B}{2}}{c^2+a^2}+\frac{\csc^2\frac{C}{2}}{a^2+b^2}$$
$$\geqslant\frac{\left(\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2}\right)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$
$$=\frac{\left(\frac{1^2}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1^2}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1^2}{\sin\frac{C}{2}}\right)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$
$$\geqslant\frac{\left[\frac{(1+1+1)^2}{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}\right]^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$
$$\geqslant\frac{\left(\frac{9}{\frac{3}{2}}\right)^2}{2\cdot 9R^2}=\frac{2}{R^2}.$$

故原不等式成立.

2012 年第6期问题

856. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 E、F 分别在边 AB、AC 上, 使 $\angle FBC=\angle ECB=\frac{1}{2}\angle A$, BF 与 CE 交于点 P. 过 P 作 $PM/\!/AC$ 交 AB 于点 M, $PN/\!/AB$ 交 AC 于点 N, 求证 $BM=CN$.

(401555 重庆市合川太和中学 袁安全供题)

857. 设 $a_1=1, a_{n+1}=\sqrt{n^2-[a_n]+1}, n=1,2,3,\cdots$, 这里 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数, 求 $[a_n]$ 的表达式.

(223800 江苏省宿迁中学(老校区) 陈炳堂供题)

858. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-c,0)$, 左准线 l 与 x 轴交于点 K. 过 K 的直线交椭圆于 A、B 两点, 点 A 关于 x 轴的对称点为 D. 求证: 点 F 在直线 BD 上.

(621000 四川绵阳东辰学校高中部 姚先伟供题)

859. 设 a、b 为满足 $a+b=ab$ 的正实数, $\lambda\geqslant 0$, 求证:

$$\frac{a}{b^2+\lambda}+\frac{b}{a^2+\lambda}\geqslant\frac{4}{\lambda+4}.$$

(672500 云南省大理州漾濞一中 秦庆雄供题)

860. 设 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$, 求证: $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}>4$.

(610031 四川成都市 宿晓阳供题)

(本栏目责任编辑 李大元 汪纯中)

(上接第6–19页)

不存在.

结论6 若对应系数满足 $\left(\frac{p_i}{p_{n-i}}\right)^{\frac{1}{n-2i}}=k$ $(i=0,1,\cdots,n)$, $\left(\frac{q_i}{q_{n-i}}\right)^{\frac{1}{n-2i}}=k\,(i=0,1,\cdots,n)$, k 为正常数, 则 $F(x)$ 是轴对称图形, 且对称轴是 $x=\log_a k$.

结论7 若对应系数满足 $\left(\frac{p_i}{p_{n-i}}\right)^{\frac{1}{n-2i}}=k$ $(i=0,1,\cdots,n)$, $\left(-\frac{q_i}{q_{n-i}}\right)^{\frac{1}{n-2i}}=k\,(i=0,1,\cdots,n)$, k 为正常数, 则 $F(x)$ 是中心对称图形, 对称中心为 $(\log_a k,0)$.

简说"分形几何"(续)

200062 华东师范大学数学系 郑英元

希尔伯特曲线(图5)是一种能填充满整个平面正方形的分形曲线，它由德国数学家希尔伯特(David Hilbert, 1862-1943)于1891年提出.

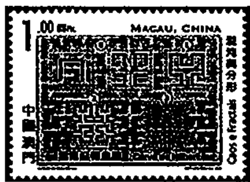


图 5(中国澳门, 2005)

波兰数学家谢尔宾斯基(W.Sierpinski, 1882-1969)于1915年提出一个有趣的例子，它是康托尔集的构思在二维平面的推广. 它的操作方法是: 先作一个正三角形(图6中的0)，在这个正三角形内，作4个相同大小的正三角形，如图6中的1那样挖去一个"中心黄三角形"，然后在剩下的3个小红三角形中各又挖去一个"中心黄三角形"(图6中的2). 这里红三角形是剩下的部分，我们称红三角形为谢尔宾斯基三角形. 谢尔宾斯基三角形的局部与整体是自相似的. 如果用上面的方法无限地作下去(图6进行了3步)，则谢尔宾斯基三角形的面积越趋近于零，各个红三角形的周长亦趋近于无限大.

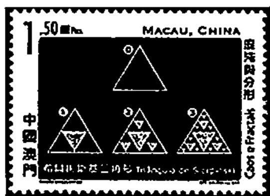


图 6(中国澳门, 2005)

曼德勃罗集合(图7)是曼德勃罗于1979年构造的集合，它被认定为分形几何的标志性图案. 它可以帮助我们更好地理解我们周围那些不规则和粗糙的世界. 曼德勃罗集合的放大过程可由方程式: $z = z^2 + c$来实现. 它有的地方像日冕，有的地方像燃烧的火焰，只要你计算的点足够多，不管你把图案放大多少倍，都能显示出更加复杂的局部. 这些局部既与整体不同，又有某种相似的地方，这种梦幻般的图案具有无穷无尽的细节和自相似性. 为此，曼德勃罗在1988年获得"科学艺术大奖". 曼德勃罗分形几何理论不仅用来理解数学问题，还可以用来描述许多其他领域的事物，如湍流的波动起伏、地质活动、行星轨道、动物群体行为、社会经济学模式等等，甚至音乐也可以通过图形来表达. 图7小型张中的邮票是朱利亚分形图.

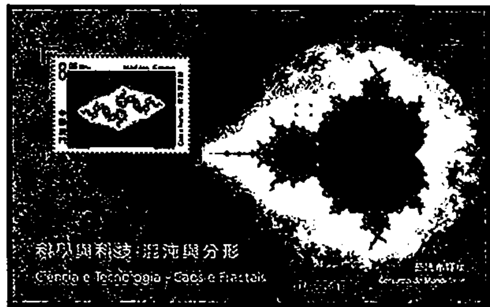


图 7(中国澳门小型张, 2006)

现在已经有很多分形几何的例子，如图8(正票图形是附票图形的某个局部). 有兴趣的读者还可以从专门的分形几何书籍，或者网上查阅到更多的例子. 如果再对分形几何图形着上各种色彩，那将格外漂亮. 这正是数学与艺术的完美结合.



图 8(以色列, 1997)

编后漫笔

也要向“教书匠”学习

张奠宙　赵小平

轻视实践、贬低匠人、看轻蓝领是当今社会生活中一种浮躁的表现.不过情况也在发生变化.

打开2012年4月19日的《文汇报》，头版上有一则通讯，说的是一位同济大学建筑学院的硕士生，到了陆家嘴工地上不会写起码的施工方案，水泥墙中的实用钢筋不会标注，于是不得不虚心请教专门砌墙的“关师傅”(人称“关砌”)，这就是说，师傅既是匠人，也是老师. 大学生向师傅学习，天经地义.

2012年获得国家最高科学技术奖的建筑大师吴良镛先生，则以“匠人”自诩. 他在清华大学的题字是“匠人营国”(语出《考工记》)，这可以理解为工匠建造了国都，也可以引申为匠人打造着国家的形象.

总之，作为有专业技能的匠人是人才，应该受人尊敬.

这就不由得让人想起“教书匠”来. 以往所说的教书匠是一个贬义词，专指那些“只会照书本念、无视学生成长”的迂腐塾师. 2010年11月22日《文汇报》上有一篇报道说：我国的中小学教师队伍中更多的是“教书匠”，缺少具有通识知识和研究型的教师. 似乎是说，前者是教书匠，后者是教育家，我国现今大多数教师都是教书匠，而不是教育家. 其实，我们常说教师是培育人的园丁，园丁就是一个朴素的劳动匠人. 现在的许多教育家是专门研究一般教育理论、谈论教育理念的. 他们也许可以在“教育科学研究院”成为院士，却未必能在三尺讲台上当好一名教书匠. 教书匠，重在教学实践，需要把心思用到精巧，需要把技术练到纯青，需要把小事做到极至. 各行各业都有专家，教书匠做精了也是专家，像教育家一样，也是受人尊敬的.

总之，我们要向教育家学习，也要向教书匠们学习.

(上接第6-14页)

这样该题就完善为“完整”的弦图了(图6)，这是1700多年前，我国古代数学家赵爽为了证明勾股定理而绘制的. 而这正是2002年北京主办的国际数学家大会(ICM 2002)会标的设计基础，图7是当年中国邮政发行的纪念邮票. 2002年国际数学家大会的会标含义丰富：正方形的四条边相等，表示各国及各国来宾地位平等；小正方形外面的三角形紧紧簇拥在一起，表明各国数学家要密切合作，共同攻克人类的难题；颜色的明暗使它看上去更像一个旋转的纸风车，这代表着中国人的热情好客——北京欢迎你!

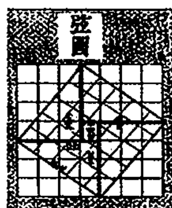


图 6



图 7

数学教学

SHU XUE JIAO XUE

2012年第6期(总第298期)

名誉主编：张奠宙
主　　编：赵小平
常务副主编：忻重义
发行范围：公　开
电　　话：021-62232712

主管单位：中华人民共和国教育部
主办单位：华东师范大学
出　　版：上海《数学教学》杂志社
邮政编码：200062(上海中山北路3663号)
广告许可证：3100720050001
印　　刷：华东师范大学印刷厂
国内总发行：上海市邮政局报刊发行局
国内订阅：全国各邮电局
电子信箱：sxjxzz@math.ecnu.edu.cn

定价：5.50元　国内统一连续出版物号：CN31-1024/G4　每月12日出版　代号：4-357